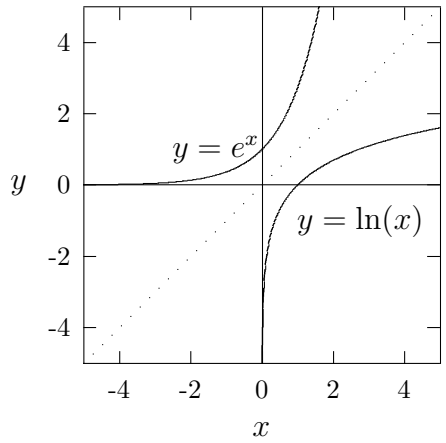
Aufgabe 1

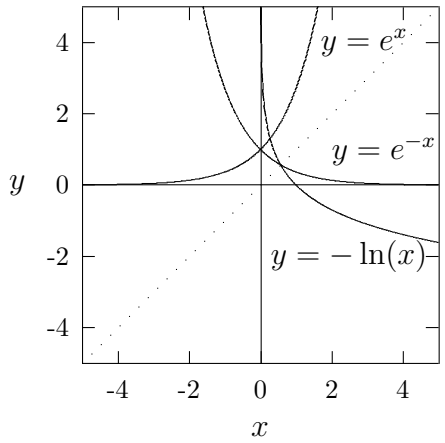
Skizzieren Sie die Funktionen e^x, $\ln(x) = \log_e(x)$ und e^{-x}. Zeichnen Sie die Umkehrfunktion zu e^{-x}. Berechnen Sie diese Umkehrfunktion dann auch formelmäßig.

Lösung: Die natürliche Logarithmusfunktion $y = \ln(x)$, d.h. die Logarithmusfunktion $y = \log_e(x)$ zur Basis e, ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $y = e^x$. Also gehen die Kurven von $y = \ln(x)$ und $y = e^x$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten ineinander über.

Die Kurve der Funktion $y = f(-x)$ entsteht durch Spiegelung der Kurve von $y = f(x)$ an der y-Achse. Also gehen $y = e^x$ und $y = e^{-x}$ durch Spiegelung an der y-Achse ineinander über. Ferner ist $y = e^{-x} = 1/e^x$, was einen weiteren Zusammenhang liefert, der beim Skizzieren der Kurven verwendet werden kann.

Hat man $y = e^{-x}$ gezeichnet, kann die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten skizziert werden.





Die Berechnung der Umkehrfunktion von $y = e^{-x}$ erfolgt in zwei Schritten.

1. Schritt: Auflösen der Gleichung $y = e^{-x}$ nach x. Logarithmieren liefert $\ln y = \ln(e^{-x}) = -x$, also $-\ln y = x$.

2. Schritt: Vertauschen von x und y. Dies gibt $y = -\ln x$.

Also ist die Funktion $y = -\ln x$ die Umkehrfunktion zu $y = e^{-x}$.

Man beachte: Wird der Graph einer Funktion $f(x)$ an der y-Achse gespiegelt, entsteht der Graph von $f(-x)$. Spiegelung an der x-Achse gibt den Graph von $-f(x)$.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Aufgabe 2

Man glaubt, in vielen Bereichen der Informatik exponentielles Wachstum beobachten zu können, beispielsweise bei den folgenden Größen: Integrationsdichte von Schaltkreisen, Prozessorleistung, Speicherkapazität von Festplatten, Übertragungskapazitäten, Anzahl der Internetbenutzer. (Suchen Sie im Internet nach dem „Gesetz von Moore“ für weitere Informationen.)

Exponentiell wachsende oder fallende Größen werden durch Funktionen

$$g(t) = A\,e^{kt}$$

beschrieben, wobei t die Zeit ist. Für $t = 0$ ergibt sich der Anfangswert A. Die Konstante k ist positiv bei wachsenden und negativ bei fallenden Größen.

(a) Angenommen, g hat sich nach 18 Monaten verdoppelt. Welches Vielfache des Anfangswertes hat man nach 3 Jahren?

(b) Welches Vielfache hat man dann nach 10 und nach 20 Jahren?

(c) Welchen Wert hat die Konstante k ?

(d) Wenn der Wert von g nach 5 Jahren gleich 1 Million ist, wie groß war dann der Ausgangswert von g ?

(e) Nach wieviel Jahren hat man das tausendfache des Ausgangswertes erreicht?

Lösung:

(a) Da g sich nach 18 Monaten verdoppelt hat, gilt $g(18\text{ Monate}) = 2A$. Wegen

$$g(18\text{ Monate}) = A\,e^{k18\text{ Monate}}$$

muß also $e^{k18\text{ Monate}} = 2$ sein.

Nach drei Jahren hat die Größe g dann den Wert

$$\begin{aligned} g(3\text{ Jahre}) &= g(36\text{ Monate}) = A\,e^{k\,36\text{ Monate}} \\ &= A\,e^{2\,k\,18\text{ Monate}} = A\left(e^{k\,18\text{ Monate}}\right)^2 = A\,2^2 \\ &= 4A, \end{aligned}$$

sie hat sich also vervierfacht.

Man kann diesen und den nächsten Teil der Aufgabe auch lösen, indem man die Exponentialfunktion auf die Basis 2 umschreibt. Verwendet man nicht mehr die Zeit t als Variable sondern die dimensionslose Variable τ, die für das τ-fache von 18 Monaten steht, erhält man

$$h(\tau) = A \cdot 2^{\tau}$$

mit $\tau = t/(18\text{ Monate})$.

(b) Wir haben

$$10 \text{ Jahre} = 120 \text{ Monate} = (18 \text{ Monate}) \frac{120}{18}\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} g(10 \text{ Jahre}) &= A\, e^{(120/18)\, k\, 18 \text{ Monate}} = A \left(e^{k\, 18 \text{ Monate}}\right)^{120/18} = A\, 2^{120/18} \\ &\approx 101,6 \cdot A. \end{aligned}$$

Entsprechend hat man nach 20 Jahren

$$g(20 \text{ Jahre}) = A\, 2^{240/18} \approx 10321 \cdot A.$$

Verwendet man die Exponentialfunktion mit der Basis 2, erhält man sofort $h\left(\frac{120}{18}\right) = A\, 2^{120/18}$ bzw. $h\left(\frac{240}{18}\right) = A\, 2^{240/18}$.

(c) Wir haben gesehen, daß

$$e^{k 18 \text{ Monate}} = 2$$

ist. Logarithmieren der Gleichung ergibt

$$k\ 18 \text{ Monate} = \ln 2.$$

Also ist

$$k = \frac{\ln 2}{18 \text{ Monate}}\,.$$

(d) Wenn g nach 5 Jahren den Wert 1 Million hat, dann gilt

$$1 \text{ Million} = 10^6 = A \cdot 2^{10/3}\,,$$

weil

$$\frac{60 \text{ Monate}}{18 \text{ Monate}} = \frac{10}{3}$$

ist. Es folgt unmittelbar

$$A = \frac{10^6}{2^{10/3}} \approx 99213.$$

(e) Die Gleichung $1000 = 2^\tau$ gilt ungefähr für $\tau = 10$, was zehnmal 18 Monate oder zehnmal $1,5$ Jahre bedeutet. Wenn wir genauer rechnen, erhalten wir aus $1000 = 2^\tau$ durch Logarithmieren $\ln(1000) = \tau \ln(2)$, woraus $\tau = \ln 1000/\ln 2$ und somit eine Zeit von $t = (\ln 1000/\ln 2) \cdot 18$ Monate $\approx 179,4$ Monate folgt, was sehr gut mit der gröberen Abschätzung übereinstimmt.

Wir haben das tausendfache des Ausgangswertes also ungefähr nach 15 Jahren erreicht.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie geometrisch den Wert von $\sin(30°)$, $\sin(45°)$ und $\sin(60°)$.

Lösung: Wir verwenden ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat, und dessen Katheten gleich lang sind. Die Länge der Katheten bezeichnen wir mit x. Neben dem rechten Winkel tritt dann zweimal der Winkel 45° auf. Da der Wert des Sinus gleich der Länge der Gegenkathete geteilt durch die Länge der Hypotenuse und der Wert des Cosinus gleich der Länge der Ankathete geteilt durch die Länge der Hypotenuse ist, folgt

$$\sin(45°) = \cos(45°) = x.$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist ferner

$$x^2 + x^2 = 1,$$

also $x^2 = 1/2$. Somit ist

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

und wir erhalten

$$\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zur Bestimmung der anderen Sinuswerte verwenden wir ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1. Für die Höhe in diesem Dreieck gilt

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2,$$

woraus $h^2 = 1 - 1/4 = 3/4$ und somit $h = \sqrt{3}/2$ folgt. Da $\sin(60°) = h/1$ ist folgt

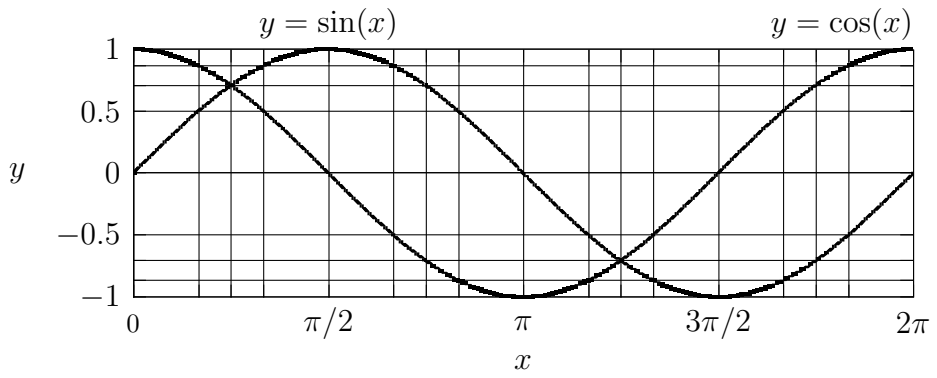
$$\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ferner kann man direkt im Dreieck ablesen, daß

$$\sin(30°) = \frac{1}{2}$$

ist.

Durch die Symmetrien der Sinus- und Cosinusfunktion treten die soeben berechneten Werte auch noch an anderen Stellen als 30°, 45° und 60° und auch beim Cosinus auf.



Aufgabe 4

Vereinfachen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\sin\varphi + \sin(\varphi + 120°) + \sin(\varphi + 240°).$$

Lösung: Wir verwenden das Additionstheorem für die Sinusfunktion

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

um $\sin(\varphi + 120°)$ und $\sin(\varphi + 240°)$ umzuformen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sin\varphi + \sin(\varphi + 120°) + \sin(\varphi + 240°) &= \sin\varphi \\
&\quad + \sin(\varphi)\cos(120°) + \cos(\varphi)\sin(120°) \\
&\quad + \sin(\varphi)\cos(240°) + \cos(\varphi)\sin(240°) \\
&= \sin\varphi \\
&\quad + \sin(\varphi)\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos(\varphi)\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\quad + \sin(\varphi)\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos(\varphi)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie, daß

(a) $\sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)$,

(b) $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos(\omega t)$.

Lösung: Wir verwenden das Additionstheorem für die Sinusfunktion

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

(a) Mit $\cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \pi) &= \sin(\omega t)\cos(\pi) + \cos(\omega t)\sin(\pi) \\ &= -\sin(\omega t). \end{aligned}$$

(b) Unter Beachtung von $\cos(-\pi/2) = 0$ und $\sin(-\pi/2) = -1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - \pi/2) &= \sin(\omega t)\cos(-\pi/2) + \cos(\omega t)\sin(-\pi/2) \\ &= -\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Aufgabe 6
Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$\sin(2x) - \cos x = 0.$$

Hinweis: $\sin(2x)$ kann zerlegt werden. Die passende Formel läßt sich durch das Umschreiben $2x = x + x$ und anschließendes Anwenden eines Additionstheorems herleiten.

Lösung: Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

erhält man

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \sin(x + x) \\ &= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x), \end{aligned}$$

eine Formel, die auch in anderem Zusammenhang nützlich sein kann. Die Gleichung $\sin(2x) - \cos x = 0$ kann damit umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \sin(2x) - \cos x &= 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) \\ &= (2\sin(x) - 1)\cos(x) = 0. \end{aligned}$$

Die verschiedenen Lösungen der Gleichung ergeben sich, wenn die beiden Faktoren der linken Seite gleich Null gesetzt werden. Aus $\cos(x) = 0$ folgt

$$x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Aus $2\sin(x) - 1 = 0$ ergibt sich $\sin(x) = 1/2$ und daraus folgt

$$x_n = \frac{\pi}{6} + n2\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

sowie

$$x_n = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$