Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

(e) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(f) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$

(h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$

Hierbei sei $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x | \, x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

Aufgabe 2

Geben Sie Beispiele für Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ an, die

(a) surjektiv aber nicht injektiv,

(b) nicht surjektiv aber injektiv,

(c) bijektiv aber ungleich der Identität,

(d) weder surjektiv noch injektiv

sind.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Mengen $M = \{a, b, c, d\}$ und $\Delta_2 = \{0, 1\}$.

(a) Geben Sie $M \times M$, $\Delta_2 \times \Delta_2$, $M \times \Delta_2$ und $\Delta_2 \times M$ an.

(b) Gibt es injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

1. von M in $\Delta_2 \times \Delta_2$,
2. von $\Delta_2 \times M$ in M,
3. von $M \times M$ in $M \times \Delta_2$,
4. von $M \times \Delta_2$ in $M \times M$?

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Es müssen keine Abbildungen explizit angegeben werden, es geht nur um ihre Existenz.

(c) Wieviele injektive, surjektive und bijektive Abbildungen gibt es von M in Δ_2 ?

Aufgabe 4

Gesucht ist die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3 + 5x/2$. Skizzieren Sie die beiden Graphen.

Aufgabe 5

Wird eine reelle Zahl x auf die nächste ganze Zahl kleiner oder gleich x abgerundet, so schreibt man das Ergebnis mit der sogenannten „Gauß-Klammer“ als $[x]$.

Die Gauß-Klammer ist also eine Funktion, die der reellen Zahl x die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich x ist, d.h. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = [x] := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n \leq x < n + 1$.

In einigen Programmiersprachen wird diese Funktion als Floor-Funktion bezeichnet. Die folgenden Schreibweisen sind gebräuchlich: $f(x) = [x] = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$.

Analog ordnet die Ceiling-Funktion der reellen Zahl x die kleinste ganze Zahl zu, die größer oder gleich x ist. Man schreibt $f(x) = \text{ceil}(x) = \lceil x \rceil$. Es ist dann $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x \rceil := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n - 1 < x \leq n$.

(a) Welche Werte ergeben sich für $\lfloor 1/2 \rfloor$, $\lceil 1/2 \rceil$, $\lfloor -1/2 \rfloor$, $\lceil -1/2 \rceil$, $\lfloor 3,7 \rfloor$, $\lceil 3,7 \rceil$, $\lfloor 14 \rfloor$ und $\lceil 14 \rceil$?

(b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

(c) Skizzieren Sie $\lfloor -x \rfloor$ und $\lceil -x \rceil$. Welche Zusammenhänge werden offensichtlich?

(d) Welche Werte ergeben sich für $x - \lfloor x \rfloor$ und für $x - \lceil x \rceil$ (sowohl bei positivem als auch bei negativem x)?

(e) Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = x - 4 \cdot [x/4]$.

(f) Es sei eine beliebige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wie sieht der Graph von $\varphi(x - 4 \cdot [x/4])$ verglichen mit dem Graphen von $\varphi(x)$ aus?