Aufgabe 1

Berechnen Sie

(a) $\dfrac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2}$,

(b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} \qquad (0 \le k \le n)$,

(c) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \qquad (0 \le k \le n-1)$.

Lösung: Die Aufgabe wird durch algebraische Umformungen gelöst. Dabei werden die Definitionen von Fakultät und Binomialkoeffizient verwendet.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2} &= \frac{(n-1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} \cdot (n+1) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Im Rechenschritt von der ersten zur zweiten Zeile wird gekürzt. Dabei wird verwendet, daß $n! = (n-1)! \cdot n$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ ist, was unmittelbar aus der Definition der Fakultät folgt.

Die Umformungen innerhalb der ersten und der zweiten Zeile sind einfache Bruchrechnung.

(b) Ausschreiben der Binomialkoeffizienten, Division durch einen Bruch als Multiplikation mit dem Kehrbruch schreiben, sowie anschließendes Kürzen unter Beachtung der Eigenschaften der Fakultät gibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \\ &= \frac{n!\,(n+1-k)!\,k!}{(n-k)!\,k!\,(n+1)!} \\ &= \frac{n+1-k}{n+1} = 1 - \frac{k}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(c) Analog zum vorherigen Teil der Aufgabe folgt durch Umschreiben und algebraische Umformungen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(n-k)!\,k!\,n!} \\ &= \frac{k+1}{n-k}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Ein Computersystem sei durch ein Passwort geschützt, das aus 8 Zeichen besteht.

(a) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein. Wie viele Passwörter sind möglich?

(b) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein, wobei unter den 8 Zeichen mindestens eine Ziffer und mindestens ein Buchstabe vorkommen muß. Wie viele Passwörter sind möglich?

(c) Um wieviel Prozent reduziert sich die Anzahl der Passwörter in (b) gegenüber (a)?

Hinweis: Es wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden.

Lösung: Es stehen 36 unterschiedliche Zeichen zur Verfügung.

(a) Aus den 36 Zeichen werden 8 ausgewählt, wobei es keinerlei Einschränkungen gibt. Ein Zeichen kann also mehrfach vorkommen. Da die Reihenfolge eine Rolle spielt, haben wir eine Variation mit Wiederholung, so daß

$$\underbrace{36 \cdot \ldots \cdot 36}_{8 \text{ Faktoren}} = 36^8 \approx 2,82 \cdot 10^{12}$$

Passwörter möglich sind.

(b) Hier gibt es einen geschickten kurzen Lösungsweg, bei dem man mit der Anzahl der nicht erlaubten Wörter arbeitet. Versucht man die erlaubten Wörter zu zählen, kommt man erst nach einer längeren Überlegung zum Ziel.

1. Weg: Erlaubt sind alle Passwörter aus Teil (a) ohne diejenigen, bei denen nur Buchstaben vorkommen (das sind 26^8) und ohne diejenigen, bei denen nur Zahlen vorkommen (das sind 10^8). Also sind

$$36^8 - 26^8 - 10^8 \approx 2,61 \cdot 10^{12}$$

Passwörter zulässig.

2. Weg: Die Anzahl der Buchstaben in einem Passwort ist mindestens 1 und höchstens 7.

Passwörter mit genau einem Buchstaben: Für den Buchstaben gibt es 26 Möglichkeiten. Für die sieben Ziffern gibt es 10^7 Möglichkeiten. Ferner ist noch zu unterscheiden, an welcher Stelle der Buchstabe steht. Es gibt $26 \cdot 10^7$ Passwörter, bei denen der Buchstabe an der 1. Position ist, ebenso $26 \cdot 10^7$ Passwörter mit dem Buchstaben an der 2. Position u.s.w. Also gibt es insgesamt $8 \cdot 26 \cdot 10^7$ Passwörter mit genau einem Buchstaben.

Passwörter mit genau zwei Buchstaben: Für die beiden Buchstaben gibt es 26^2 und für die sechs Ziffern 10^6 Möglichkeiten. Aber wieviele unterschiedliche Fälle gibt es aufgrund der verschiedenen Positionen der beiden Buchstaben? Hier hilft eine Überlegung analog zum Zahlenlotto; wir ziehen 2 aus 8 Positionen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge und ohne Wiederholung der Position. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{8}{2}$$

liefert die Anzahl der möglichen Ziehungen bzw. der möglichen Buchstabenpositionen. Es gibt somit

$$\binom{8}{2} 26^2\, 10^6$$

Passwörter mit genau zwei Buchstaben.

Entsprechend überlegt man sich, daß es

$$\binom{8}{3} 26^3\, 10^5$$

Passwörter mit genau drei Buchstaben gibt u.s.w.

Addiert man alle erlaubten Fälle, so ergibt sich als Gesamtzahl der erlaubten Passwörter

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{7} \binom{8}{k} 26^k\, 10^{8-k} && (1)\\
= \; & \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 26^k\, 10^{8-k} - \binom{8}{0} 26^0\, 10^8 - \binom{8}{8} 26^8\, 10^0 && (2)\\
= \; & (26+10)^8 - 10^8 - 26^8 && (3)\\
= \; & 36^8 - 10^8 - 26^8. && (4)
\end{aligned}$$

In (1) werden die Fälle „genau ein Buchstabe“, ..., „genau sieben Buchstaben“ addiert. In (2) wird statt von $k = 1$ von $k = 0$ an summiert; damit die Gleichung stimmt, wird der Summand für $k = 0$ nach der Summation subtrahiert. Entsprechend für $k = 8$. Auf den Ausdruck (3) kommt man ausgehend von (2) mit der binomischen Formel. In (4) erhält man dann das selbe Ergebnis wie bei dem ersten Rechenweg.

(c) Aus der Gleichung

$$\frac{2,61 \cdot 10^{12}}{2,82 \cdot 10^{12}} = \frac{x}{100}$$

folgt

$$x = \frac{261}{2,82} \approx 92,6.$$

Die Anzahl der Passwörter reduziert sich um circa $7,4\%$.

Aufgabe 3

Ein DNA-Strang besteht aus hintereinander aufgereihten Nukleotidmolekülen. Es gibt vier verschiedene Nukleotide. Wieviel verschiedene DNA-Stränge der Länge 260 sind möglich? Stellen Sie das Ergebnis in der Zehnerpotenz-Schreibweise dar.

Lösung: Bei einem DNA-Strang ist die Reihenfolge der Nukleotidmoleküle wesentlich. Ferner kann das gleiche Molekül mehrfach auftreten. Dies ist eine Variation mit Wiederholung. Es ergeben sich

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{260 \text{ Faktoren}} = 4^{260}$$

Möglichkeiten.

Bei der Umformung in eine Zehnerpotenz muß das x mit

$$10^x = 4^{260}$$

bestimmt werden. Eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Exponenten steht, wird durch Logarithmieren gelöst. Es folgt

$$\log_{10} 10^x = x = \log_{10} 4^{260} = 260 \log_{10} 4.$$

also ist

$$x \approx 0,60206 \cdot 260 = 156,536.$$

Damit ergibt sich

$$4^{260} \approx 10^{156,536} = 10^{156} \cdot 10^{0,536} \approx 3,436 \cdot 10^{156} \approx 10^{156}.$$

Bei der Rundung auf eine Zehnerpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist ein interessantes Detail zu beachten: Man darf nicht $156,536$ auf 157 aufrunden. Vielmehr darf erst am Schluß gerundet werden; es ergibt sich dann 156 als Exponent. Das erscheint zunächst verblüffend, kann aber anschaulich mit der Krümmung der Kurve von $y = 10^x$ erklärt werden. (Die Kurve ist konvex; deshalb wird die Mitte des Intervalls $[0;1]$ nicht auf die Mitte des Intervalls [1;10] abgebildet.)

Aufgabe 4

Wie groß muß die Mindestlänge eines DNA-Strangs, d.h. die Mindestanzahl hintereinander aufgereihter Nukleotide sein, damit mindestens 10^{100} unterschiedliche Kodierungen möglich sind?

Lösung: Besteht ein DNA-Strang aus x Nukleotiden, sind 4^x Kodierungen möglich. Wir lösen also die Gleichung

$$4^x = 10^{100}.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist dann $\lceil x \rceil$, der nächstgrößere ganzzahlige Wert. Logarithmieren der Gleichung liefert

$$\log_{10} 4^x = \log_{10} 10^{100} = 100.$$

Mit dem Logarithmengesetz $\log(a^b) = b \log(a)$ (für $a > 0$) folgt

$$x \log_{10} 4 = 100,$$

und daraus

$$x = \frac{100}{\log_{10} 4} \approx 166,096.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist also $\lceil 166,096 \rceil = 167$.

Aufgabe 5

Ein portables Gerät zur Messung von Luftschadstoffen kann mit bis zu vier Zusatzmodulen (Drucker für Meßwerteprotokoll, Positionsbestimmung über Satelliten, Datenübertragung per Funk, Statistik-Software) ausgerüstet werden, die unabhängig voneinander eingebaut werden können, d.h. beliebig miteinander kombinierbar sind. Wieviele verschiedene Ausstattungsvarianten gibt es (einschließlich der Basisversion ohne Zusatzmodule)?

Lösung: Wir betrachten zwei Lösungswege.

1. Weg: Aus den vier Zusatzmodulen kann entweder keines, oder genau eines, oder genau zwei, oder genau drei oder genau vier ausgewählt und eingebaut werden. Also werden aus 4 unterschiedlichen Elementen k herausgegriffen, wobei

die Reihenfolge keine Rolle spielt, da es egal ist, welches Zusatzgerät zuerst und welches danach eingebaut wird.

Wir haben also eine Situation entsprechend dem Zahlenlotto, wir ziehen statt 6 aus 49 jetzt k aus 4. Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung; die Anzahl der Möglichkeiten wird mit Binomialkoeffizienten berechnet. Wollen wir z. B. zwei Zusatzmodule einbauen, so ist die Anzahl unserer Wahlmöglichkeiten gleich dem Wert des Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{2}.$$

Die Gesamtzahl der Ausstattungsvarianten ist die Summe der Möglichkeiten bei keinem Zusatzmodul, genau einem Zusatzmodul u.s.w., also

$$\underbrace{\binom{4}{0}}_{\text{Grundgerät}} + \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{ein Zusatzmodul}} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1+4+6+4+1 = 16.$$

2. Weg: Für jedes der Zusatzmodule gibt es zwei Möglichkeiten: entweder es ist eingebaut oder es ist nicht eingebaut. Die Anzahl der Ausstattungsvarianten ist damit

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$$

Man könnte den „Ausstattungszustand“ eines Gerätes auch mit einer Zeichenkette aus vier Bits beschreiben: ein Bit ist gesetzt, wenn das entsprechende Modul vorhanden ist. Zum Beispiel würde dann die Zeichenkette $(1, 0, 1, 1)$ bedeuten, daß die Module 1, 3 und 4 vorhanden sind und Modul 2 fehlt. Bei 4 Bits gibt es aber $2^4 = 16$ Kodierungsmöglichkeiten, also gibt es 16 Konfigurationen für das Meßgerät.

Aufgabe 6

Zur Kennzeichnung der verschiedenen Varianten eines elektronischen Bauteils soll ein Code benutzt werden, der aus 4 nebeneinanderliegenden verschiedenfarbigen Balken besteht, die auf das Bauteil aufgedruckt werden. Der erste Balken ist immer schwarz, für die anderen werden die Farben Rot, Grün, Gelb, Braun, Orange, Cyan, Magenta und Blau verwendet.

Wieviel Codierungen sind möglich, wenn keine Farbe mehrfach vorkommen darf?

Lösung: Abgesehen von Schwarz haben wir 8 Farben zur Auswahl. Bei der ersten Färbung gibt es dann 8 Wahlmöglichkeiten, bei der zweiten nur noch 7, da eine Farbe bereits verwendet wurde. Schließlich haben wir bei der dritten Färbung

noch 6 Möglichkeiten, da zwei der 8 Farben schon benutzt wurden und nicht mehr verwendet werden dürfen. Insgesamt gibt es damit

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Kodierungen.

Mit anderen Worten: Wir haben eine Variation dritter Ordnung von acht Elementen ohne Wiederholung

$$v(n,k) = v(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Aufgabe 7

Wieviele Gruppen können aus 7 Männern und 5 Frauen gebildet werden, wobei die Gruppen sich zusammensetzen aus

(a) 3 Männern und 5 Frauen;

(b) 5 Personen, von denen mindestens 3 Männer sind?

Lösung:

(a) Aus einer Gruppe von 7 Männern werden 3 ausgewählt. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Gehören Donald, Linus und Bill zum Klub, dann ist es egal, ob zuerst Donald, dann Bill und zuletzt Linus Mitglied wurde oder erst Bill, dann Linus und schließlich Donald. Das ist die Situation des Zahlenlottos, es wird gezogen, und die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle. Also gibt es bei den Männern

$$\binom{7}{3}$$

Möglichkeiten. Alle 5 Frauen müssen Mitglieder der Gruppe sein, hier gibt es keine Auswahl. Will man das unbedingt mit einem Binomialkoeffizienten schreiben, hat man

$$\binom{5}{5} = 1.$$

Insgesamt gibt es also

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 = 35$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung der Gruppe.

(b) „Mindestens 3 Männer“ heißt bei einer Gesamtzahl von 5 Personen: entweder genau 3 Männer, oder genau 4 Männer, oder genau 5 Männer.

Sind genau 3 Männer in der Gruppe, gibt es

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung.

Bei genau 4 Männern haben wir

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 = 175$$

unterschiedliche Gruppen.

Schließlich gibt es bei genau 5 Männern

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{0} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

Gruppen.

Die Gesamtzahl der Gruppen ergibt sich als Summe

$$350 + 175 + 21 = 546.$$

Aufgabe 8

Ein Ausschuß der Fachhochschule soll aus 10 Studierenden bestehen, wobei 4 Studierende aus dem Fachbereich KMUB, 3 Studierende aus dem FB E1 und ebenfalls 3 Studierende aus dem FB MNI sein sollen.

Es stellen sich 6 KMUB-, 8 E1-, und 5 MNI-Studierende zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses gibt es?

Lösung: Für KMUB werden 4 Personen aus 6 ausgewählt, für E1 sind es 3 Personen aus 8 und für MNI werden 3 Personen aus 5 bestimmt. Bei der Auswahl kommt es nicht auf die Reihenfolge an, nur die Mitgliedschaft in dem Gremium ist relevant. Also wird die Anzahl der Möglichkeiten jeweils mit einem Binomialkoeffizienten berechnet.

Da jede Auswahl des einen Fachbereichs mit jeder Auswahl der anderen Fachbereiche verknüpft werden kann, müssen die drei Binomialkoeffizienten miteinander multipliziert werden. Insgesamt gibt es damit

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{KMUB}} \cdot \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{E1}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{MNI}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15 \cdot 56 \cdot 10 = 8400$$

Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses.