Aufgabe 1

Vier verschiedene Mathematikbücher, sechs verschiedene Informatikbücher und zwei verschiedene Physikbücher sollen auf einem Regal angeordnet werden. Wie viele verschiedene Anordnungen sind möglich, wenn

(a) die Bücher aus einem Fachgebiet alle zusammenstehen sollen;

(b) nur die Mathematikbücher zusammenstehen sollen?

Lösung:

(a) Die Anzahl der Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten) für die vier Mathematikbücher ist 4!. Entsprechend gibt es für die Informatikbücher 6! Permutationen und für die Physikbücher 2!. Nun können aber auch die drei Büchergruppen untereinander vertauscht werden, d. h. es können zum Beispiel alle Mathematikbücher am Anfang stehen, dann kommen die Informatik- und dann die Physikbücher; oder aber die Informatikbücher stehen am Anfang u.s.w. Die Anzahl der Permutationen für die drei Büchergruppen beträgt 3!.

Insgesamt erhält man

$$4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 720 \cdot 2 \cdot 6 = 207360$$

Möglichkeiten der Anordnung.

(b) Die vier Mathematikbücher können auf 4! Arten angeordnet werden. Die Informatik- und Physikbücher können in beliebiger Reihenfolge stehen. Aber auch die Gruppe der vier Mathematikbücher kann an unterschiedlichen Positionen sein: sie kann am Anfang vor allen Informatik- und Physikbüchern kommen, es kann ein Informatikbuch vor der Gruppe der vier Mathematikbücher stehen, zwei Informatikbücher können vor der Gruppe stehen u.s.w.

Wir haben also neun Objekte, die unterschiedlich angeordnet werden können: acht Bücher (sechs zur Informatik, zwei zur Physik) und eine Büchergruppe. Neun Objeklte kann man aber auf 9! Arten anordnen.

Insgesamt ergeben sich

$$4! \cdot 9! = 24 \cdot 362880 = 8709120$$

Möglichkeiten der Anordnung.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Aufgabe 2

Es nehmen 600 Personen mit jeweils einem Los an einer Lotterie teil, bei der drei Preise ausgespielt werden: 1000 Euro, 500 Euro und 100 Euro. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für den Ausgang der Verlosung?

Lösung: Hier haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 600“, denn es soll natürlich ausgeschlossen werden, daß eine Person zwei oder gar alle drei Preise bekommt. Bei der Ziehung der drei Preisträger spielt die Reihenfolge eine Rolle, da sich die drei Preise unterscheiden. Also geht es darum, „3 aus 600 mit Berücksichtigung der Reihenfolge“ zu bestimmen. Das ist eine Variation ohne Wiederholung. Es ergibt sich

$$v(600,3) = \frac{600!}{(600-3)!} = 600 \cdot 599 \cdot 598 = 214921200.$$

Zunächst hat man 600 Möglichkeiten (Personen, die gezogen werden können). Nachdem Person 1 bestimmt ist, hat man noch 599 Möglichkeiten. Schließlich bleiben noch 598 Möglichkeiten für die letzte Ziehung. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt der drei Zahlen.

Arbeitet man mit der Formel

$$v(600,3) = \frac{600!}{(600-3)!} = \frac{600!}{(597)!},$$

so kommt man ohne Umformung, d.h. ohne Kürzen, nicht weiter, da die Fakultäten zu groß für Taschenrechner sind. (Gute Mathematik-Software wertet solche Ausdrücke richtig aus. Testen Sie das bei Gelegenheit.)

Aufgabe 3

Wieviel vierstellige Zahlen können mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 8 und 9 gebildet werden, wenn keine dieser Ziffern mehr als einmal in jeder Zahl auftreten darf?

Lösung: Wir haben sechs unterschiedliche Ziffern, aus denen vier gezogen werden sollen; die Reihenfolge ist dabei zu beachten, da $1357 \neq 7315$ ist. Also haben wir eine Variation (Reihenfolge beachten) ohne Wiederholung (keine Ziffer mehrfach).

Bei der 1. Ziehung gibt es 6 Möglichkeiten, bei der 2. Ziehung 5 Möglichkeiten u.s.w. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Aufgabe 4

In einer Klausur wird eine Multiple-Choice-Aufgabe mit 6 Antwortmöglichkeiten gestellt. Wieviel unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, 3 Antworten anzukreuzen?

Lösung: In welcher Reihenfolge die Antworten angekreuzt werden spielt keine Rolle und ist ja auch gar nicht feststellbar. Also haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 6 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“. Das entspricht der Situation beim Zahlenlotto 6 aus 49 und ist eine Kombination (die Reihenfolge ist egal) ohne Wiederholung (keine Antwort wird mehrfach angekreuzt). Es ergeben sich

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 5

Es sollen 5 Männer und 4 Frauen in einer Reihe sitzen, und zwar so, daß die Frauen die geraden Plätze einnehmen. Wie viele solcher Anordnungen sind möglich?

Lösung: Die Anzahl der Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der Frauen ist 4!. Die Anzahl der Permutationen der Männer ist 5!.

Jede Anordnung der Frauen ist mit jeder Anordnung der Männer kombinierbar. Also gibt es insgesamt

$$4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$$

Anordnungen.

Da die Plätze der Frauen und der Männer festgelegt sind, gibt es keine weiteren Möglichkeiten durch einen Platztausch der Frauen und Männer untereinander.

Aufgabe 6

In einem Gerät sind versehentlich 8 Steckverbindungen geöffnet worden, wodurch 5 rote und 3 blaue Drähte unterbrochen sind. Jeder der 8 Drähte hat eine spezielle Funktion, d.h. jeder Stecker gehört eindeutig in eine der Buchsen, wobei zu einem roten Stecker eine der roten Buchsen und zu einem blauen Stecker eine der blauen Buchsen gehört.

Wieviel Möglichkeiten gibt es, die 8 Steckverbindungen zu schließen, wenn nur die farbliche Zusammengehörigkeit eingehalten wird?

Lösung: Wir ordnen die Buchsen in einer beliebigen Reihenfolge an und halten diese dann fest. Stellen Sie sich zum Beispiel vor, daß Sie die Drähte nebeneinanderlegen, links die roten und rechts die blauen.

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 5}_{\text{rot}} \qquad \underbrace{6 \quad 7 \quad 8}_{\text{blau}}$$

Sind die Buchsen in einer festen Reihenfolge, dann reduziert sich die Aufgabe auf das Durchprobieren aller Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der

roten Stecker und aller Permutationen der blauen Stecker, wobei jede rote Permutation mit jeder blauen kombiniert werden kann.

Für die 5 roten Stecker gibt es 5! Permutationen, für die blauen 3!. Insgesamt haben wir damit

$$5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 7

In einem Gremium einer Hochschule haben die Studierenden 4 Sitze. Bei der Wahl zu diesem Gremium kandidieren aus jedem der 9 Fachbereiche mindestens 4 Studierende, so daß ein Ergebnis möglich ist, bei dem alle studentischen Mitglieder aus nur einem Fachbereich kommen. Numerieren wir die Fachbereiche von 1 bis 9, können z.B. alle aus FB 6 oder alle aus FB 8 sein. Es können aber auch zwei aus FB 7, einer aus FB 3 und einer aus FB 1 sein.

Wieviele verschiedene solcher Verteilungen der 4 Sitze auf die 9 Fachbereiche sind insgesamt möglich?

Lösung: Die Reihenfolge bzw. die Stimmenzahl, mit der die vier studentischen Mitglieder des Gremiums gewählt wurden, spielt für unsere Betrachtung keine Rolle. Es kommt nur darauf an, ob man Mitglied ist oder nicht. Sind z.B. drei der Studierenden aus FB 7 und einer aus FB 4, ist es egal, wer mit den meisten Stimmen gewählt wurde. Wir haben also eine Kombination.

Da aus jedem Fachbereich genügend Personen kandidieren, könnten die Sitze komplett mit Mitgliedern jedes beliebigen Fachbereichs besetzt werden. Es sind also bei den Zugehörigkeiten zu den Fachbereichen uneingeschränkt Wiederholungen möglich. Also haben wir eine Kombination mit Wiederholung.

Wir wählen aus der Menge M der Fachbereiche aus, M hat $n = 9$ Elemente. Da wir $k = 4$ Personen auswählen, gibt es

$$c^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

also

$$c^*(9,4) = \binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

Möglichkeiten, nämlich die Anzahl der Kombinationen 4. Ordnung von 9 Elementen mit Wiederholung.