Aufgabe 1

Berechnen Sie:

(a) $(7-3i)+(3+9i)$

(b) $(-17+4i)-(8-7i)$

(c) $(3-5i)\cdot(2+3i)$

(d) $(3,5-i)\cdot(7+2,5i)$

(e) $(4,5-1,5i)^2$

(f) $i\cdot(2,5-i)^2$

(g) $\dfrac{1}{7-3i}$

(h) $\dfrac{-5+3i}{7+2i}$

Lösung:

(a) $(7-3i)+(3+9i)=10+6i$
Die Klammern sind nicht notwendig und sollen nur veranschaulichen, daß hier zwei komplexe Zahlen addiert werden.

(b) $(-17+4i)-(8-7i)=-25+11i$
Das erste Klammernpaar ist nicht notwendig, das zweite kann wegen des Minuszeichens nicht weggelassen werden.

(c) $(3-5i)\cdot(2+3i)=6-15i^2+9i-10i=21-i$
Hier sind beide Klammernpaare notwendig.

(d) $(3,5-i)\cdot(7+2,5i)=\left(\frac{7}{2}-i\right)\left(7+\frac{5}{2}i\right)=\frac{49}{2}-\frac{5}{2}i^2+\frac{35}{4}i-7i=27+\frac{7}{4}i$
$=27+1,75i$

(e) $(4,5-1,5i)^2=\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2=\frac{81}{4}-\frac{27}{2}i+\frac{9}{4}i^2=18-\frac{27}{2}i=18-13,5i$

(f) $i\cdot(2,5-i)^2=i\left(\frac{5}{2}-i\right)^2=i\left(\frac{25}{4}-5i+i^2\right)=5+\frac{21}{4}i=5+5,25i$

(g) $\dfrac{1}{7-3i}=\dfrac{7+3i}{(7-3i)(7+3i)}=\dfrac{7+3i}{49+9}=\dfrac{7}{58}+\dfrac{3}{58}i$

(h) $\dfrac{-5+3i}{7+2i}=\dfrac{(-5+3i)(7-2i)}{(7+2i)(7-2i)}=\dfrac{-35+10i+21i-6i^2}{49+4}=\dfrac{-29+31i}{53}$
$=-\dfrac{29}{53}+\dfrac{31}{53}i$

Aufgabe 2

Folgenden Ausdrücke sind zu berechnen:

(a) $\dfrac{17-6i}{3-4i}$ (b) $\dfrac{1+3i}{1-i}$ (c) $\dfrac{5}{1-2i}$ (d) $\dfrac{(3+i)^2}{2-i}$

Lösung:

(a) $\dfrac{17-6i}{3-4i} = \dfrac{(17-6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{51+68i-18i+24}{9+16} = \dfrac{75+50i}{25} = 3+2i$

(b) $\dfrac{1+3i}{1-i} = \dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i+3i+3i^2}{1+1} = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i$

(c) $\dfrac{5}{1-2i} = \dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{5+10i}{1+4} = 1+2i$

(d) $\dfrac{(3+i)^2}{2-i} = \dfrac{9+6i+i^2}{2-i} = \dfrac{(8+6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{16+8i+12i+6i^2}{4+1}$

$= \dfrac{10+20i}{5} = 2+4i$

Aufgabe 3

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3-2i$ und $z_2 = 4+2i$. Berechnen Sie

$$z_3 = z_1 \cdot z_2, \quad \mathrm{Re}\,(z_3), \quad \mathrm{Im}\,(z_3), \quad z_3^*, \quad |z_3|$$

und

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2}\,, \quad \mathrm{Re}\,(z_4), \quad \mathrm{Im}\,(z_4), \quad z_4^*, \quad |z_4|.$$

Lösung:

$z_3 = (3-2i)(4+2i) = 12+6i-8i-4i^2 = 16-2i$

$\mathrm{Re}(z_3) = 16; \qquad \mathrm{Im}(z_3) = -2; \qquad z_3^* = 16+2i$

$|z_3| = \sqrt{16^2+(-2)^2} = \sqrt{260}$

$z_4 = \dfrac{3-2i}{4+2i} = \dfrac{(3-2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{12-6i-8i+4i^2}{16+4} = \dfrac{8-14i}{20} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{7}{10}\,i$

$= 0,4-0,7i$

$$\mathrm{Re}(z_4) = 0,4; \qquad \mathrm{Im}(z_4) = -0,7; \qquad z_4^* = 0,4 + 0,7i$$

$$|z_4| = \sqrt{\frac{16}{100} + \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{65}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{65} \approx 0,8$$

Aufgabe 4

Gegeben sind $z_1 = 7 - 4i$, $z_2 = 10 - 2i$ und $z_3 = -1 + i$. Berechnen Sie

$$z_4 = \frac{z_1 + z_2^* \cdot i^2}{3\, z_3^*}$$

sowie $\mathrm{Re}\,(z_4)$, $\mathrm{Im}\,(z_4)$, z_4^*, $|z_4|$.

Lösung:

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{7 - 4i + (10 + 2i) \cdot (-1)}{3(-1 - i)} \\ &= \frac{-3 - 6i}{-3 - 3i} = \frac{1 + 2i}{1 + i} = \frac{1 + i}{1 + i} + \frac{i}{1 + i} \\ &= 1 + \frac{i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = 1 + \frac{1 + i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\, i \end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\,(z_4) = \frac{3}{2}\,; \quad \mathrm{Im}\,(z_4) = \frac{1}{2}\,; \quad z_4^* = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\, i\,; \quad |z_4| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils den Realteil und den Imaginärteil der folgenden Zahlen:

$$(1 - i)^2, \quad (1 + i)^2, \quad \frac{1}{1 - i}\,, \quad \frac{1 + i}{i}\,, \quad \frac{i}{1 + i}\,, \quad \frac{1 + i}{1 - i}\,.$$

Lösung:

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i, \quad \mathrm{Re}(z) = 0, \quad \mathrm{Im}(z) = -2,$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i, \quad \mathrm{Re}(z) = 0, \quad \mathrm{Im}(z) = 2,$$

$$\frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}\,,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1+i}{i} &= \frac{(1+i)i}{i \cdot i} = \frac{i-1}{-1} = 1-i, \quad \mathrm{Re}(z) = 1, \quad \mathrm{Im}(z) = -1, \\
\frac{i}{1+i} &= \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}\,, \\
\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i, \quad \mathrm{Re}(z) = 0, \quad \mathrm{Im}(z) = 1.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Für welche reellen Zahlen a und b gilt

$$(a+2i) \cdot (1+bi) = (5-3i)^2 \qquad ?$$

Lösung: Hinter *einer* Gleichung für komplexe Zahlen verbergen sich *zwei* Gleichungen für reelle Zahlen.

$$
\begin{aligned}
(a+2i)(1+bi) &= (5-3i)^2 \\
a + abi + 2i + 2bi^2 &= 25 - 30i + 9i^2 \\
a - 2b + (ab+2)i &= 16 - 30i
\end{aligned}
$$

Realteil links gleich Realteil rechts gibt

$$a - 2b = 16. \tag{1}$$

Imaginärteile gleichgesetzt liefert

$$2 + ab = -30. \tag{2}$$

Geometrisch bedeutet das: zwei Punkte der komplexen Ebene sind gleich, wenn die waagrechten und die senkrechten Koordinaten übereinstimmen.

Aus Gleichung (1) folgt

$$a = 16 + 2b. \tag{3}$$

In Gleichung (2) eingesetzt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
2 + 16b + 2b^2 &= -30 \\
32 + 16b + 2b^2 &= 0 \\
b^2 + 8b + 16 &= 0 \\
b_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{16-16} \\
b &= -4.
\end{aligned}
$$

Aus Gleichung (3) folgt dann

$$a = 16 + 2(-4) = 8.$$

Damit haben wir als Endergebnis $a = 8$ und $b = -4$.