Aufgabe 1

Es sei $P(x)$ ein Prädikat und $M = \{a, b, c\}$ der Individuenbereich zu x. Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente Aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

(a) $\forall x P(x)$

(b) $\exists x P(x)$

(c) $\neg \forall x P(x)$

(d) $\neg \exists x P(x)$

(e) $\forall x \neg P(x)$

(f) $\exists x \neg P(x)$

Lösung: Da der Individuenbereich endlich ist, kann man den Allquantor durch endlich viele Konjunktionen und den Existenzquantor durch endlich viele Disjunktionen ersetzen. Damit ergeben sich die folgenden logischenÄquivalenzen.

(a) $\forall x P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$

(b) $\exists x P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c)$

(c) $\neg \forall x P(x) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c))$

(d) $\neg \exists x P(x) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c))$

(e) $\forall x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$

(f) $\exists x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

Aufgabe 2

Es sei $A(x)$ die Aussageform „$x + 1 > 2x$“. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen, wenn der Einsetzungsbereich aus allen ganzen Zahlen besteht?

(a) $A(0)$

(b) $A(-1)$

(c) $A(1)$

(d) $\exists x A(x)$

(e) $\forall x A(x)$

(f) $\exists x \neg A(x)$

(g) $\forall x \neg A(x)$

Lösung:

(a) Die Aussage $A(0)$ bedeutet „$1 > 0$“, ist also wahr.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(b) $A(-1)$ steht für „$0 > -2$“, ist also wahr.

(c) $A(1)$ bedeutet „$2 > 2$“, ist also falsch.

(d) $\exists x A(x)$ ist wahr, da z.B. $A(0)$ wahr ist.

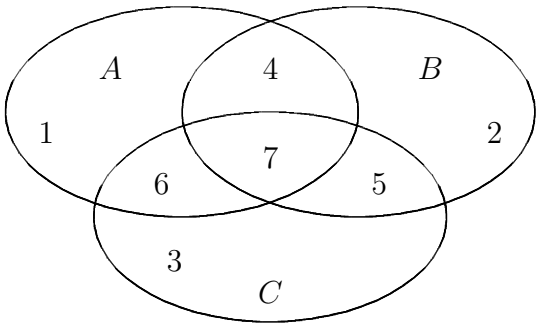
(e) $\forall x A(x)$ ist falsch, da z.B. $A(1)$ nicht wahr ist.

(f) $\exists x \neg A(x)$ ist wahr, z.B. ist $A(x)$ für $x = 1$ falsch, so daß $\neg A(1)$ wahr ist.

(g) $\forall x \neg A(x)$ ist falsch, z.B. ist $A(0)$ wahr, also $\neg A(0)$ falsch.

Aufgabe 3

Gegeben seien die folgenden drei sich überschneidenden Teilmengen A, B und C in der Ebene:



Wie erhält man die mit 1, ..., 7 gekennzeichneten sich nicht überschneidenden Teilmengen der Ebene durch Mengenoperationen aus A, B und C?

Lösung: Wir bezeichnen die sieben Mengen im folgenden mit $M_1, \ldots, M_7$. Man kann diese Mengen auf mehrere Arten durch Mengenoperationen mit den Mengen A, B und C bekommen. Zum Beispiel ist:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (A \setminus B) \setminus C \quad \text{oder} \quad M_1 = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\
M_2 &= (B \setminus A) \setminus C \\
M_3 &= (C \setminus A) \setminus B \\
M_4 &= (A \cap B) \setminus C \\
M_5 &= (B \cap C) \setminus A \\
M_6 &= (A \cap C) \setminus B \\
M_7 &= A \cap B \cap C
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Es seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die Distributivgesetze

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Lösung: Vereinigung und Durchschnitt von Mengen wurden mit Hilfe von Junktoren der Aussagenlogik definiert. Deshalb lassen sich die beiden Distributivgesetze auf entsprechende Gesetze für Aussagen zurückführen.

Wir schreiben die Distributivgesetze in Formeln der Ausssagenlogik um, wenden darauf die bekannten (mit Wahrheitstafeln bewiesenen) Gesetze der Aussagenlogik an und schreiben die so erhaltenen Formeln wieder um in die Darstellung mit der Mengenvereinigung und dem Mengendurchschnitt.

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x|\, (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C))\} \\
&= \{x|\, (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]\} \\
&= \{x|\, [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]\} \\
&= \{x|\, [x \in (A \cap B)] \vee [x \in (A \cap C)]\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Die Herleitung des zweiten Distributivgesetzes verläuft völlig analog.

Aufgabe 5

Es sei $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ für $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Geben Sie die folgenden Mengen an.

(a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Lösung: Zur Verdeutlichung kann man sich die Mengen A_i für einige Werte von i aufschreiben:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1\} \\
A_2 &= \{1, 2\} \\
A_3 &= \{1, 2, 3\} \\
A_4 &= \{1, 2, 3, 4\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich

(a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\} = A_n$,

(b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{1\} = A_1.$

Aufgabe 6

Geben Sie zu $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ und $C = \{0\}$ die Menge $M = A \times B^2 \times C$ in der aufzählenden Darstellung an.

Lösung: $M = A \times B^2 \times C = A \times B \times B \times C$ ist ein kartesisches Produkt aus vier Mengen; also ist M eine Menge von 4-Tupeln.

$$\begin{aligned} M \;=\; \{\, & (1,x,x,0),(1,x,y,0),(1,y,x,0),(1,y,y,0), \\ & (2,x,x,0),(2,x,y,0),(2,y,x,0),(2,y,y,0), \\ & (3,x,x,0),(3,x,y,0),(3,y,x,0),(3,y,y,0)\,\} \end{aligned}$$