Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Wahrheitstafeln

(a) $A \leftrightarrow B$ ist logisch äquivalent zu $(A \to B) \wedge (B \to A)$,

(b) $A \to B$ ist logisch äquivalent zu $\neg A \vee B$,

(c) $A \vee B$ ist logisch äquivalent zu $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Also kann man jede zusammengesetzte Aussage nur mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ formulieren. Denn falls die Junktoren $\vee$, $\to$ oder $\leftrightarrow$ vorkommen, ersetzt man zunächst $\leftrightarrow$, dann $\to$ und schließlich $\vee$ entsprechend den obigen logischen Äquivalenzen.

Ist es mögliche, jede zusammengesetzte Aussage nur unter Verwendung der beiden Junktoren $\neg$ und $\vee$ zu formulieren?

Lösung:

(a)

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

(b)

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

(c)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Mit Regeln der Aussagenlogik (siehe Vorlesung, Skript 2, Satz) folgt

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A) \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow A \vee B,$$

man kann also die logische Äquivalenz aus dem dritten Teil der Aufgabe auch auf diesem Weg herleiten.

Die logischen Äquivalenzen zeigen, daß jede Aussage nur unter Verwendung der Junktoren $\neg$ und $\wedge$ geschrieben werden kann. In der Zusatzfrage geht es nun darum, ob es entsprechend möglich ist, jede zusammengesetzte Aussage ausschließlich mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\vee$ zu formulieren. Um dies zu zeigen, genügt es, den Junktor $\wedge$ mit $\neg$ und $\vee$ auszudrücken. Wie kommt man auf eine solche Formulierung? Wir können z.B. mit den Regeln der Aussagenlogik arbeiten und ein Umformung ähnlich wie oben aufschreiben (nur jetzt „von rechts nach links“:

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B).$$

Es ist sogar möglich, mit nur einem einzigen Junktor auszukommen (siehe Literatur).

Aufgabe 2

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, daß die folgenden zusammengesetzten Aussagen immer wahr sind, unabhängig davon, mit welchen Wahrheitswerten die Teilaussagen belegt sind:

(a) $A \vee (\neg A)$,
Satz vom ausgeschlossenen Dritten,

(b) $\neg(A \wedge (\neg A))$,
Satz vom Widerspruch,

(c) $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$,
Satz von der doppelten Verneinung,

(d) $(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$,
$(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$,
Sätze von De Morgan,

(e) $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$,
Satz zum modus ponens, Abtrennungsregel,

(f) $((A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$,
Satz zum modus tollens, Widerlegungsregel,

(g) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$,
Satz zum modus barbara, Kettenschlußregel.

Lösung:

(a)

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
w	f	w
f	w	w

(b)

A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$	$\neg(A \wedge (\neg A))$
w	f	f	w
f	w	f	w

(c)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

(d)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

Das Muster der Wahrheitswerte in den letzten beiden Spalten stimmt überein, d.h die betreffenden Aussagen sind logisch äquivalent. Mit einer entsprechenden Tabelle folgt, daß der Ausdruck $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ ebenfalls eine Tautologie ist.

(e)

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A$	$((A \to B) \wedge A) \to B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

(f)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$(A \to B) \wedge (\neg B)$	$*$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Hierbei steht $*$ für $((A \to B) \wedge (\neg B)) \to (\neg A)$.

(g)

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$	$*$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Hierbei steht $*$ für $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.

Aufgabe 3

In einem technischen Dokument stehen die folgenden[1] Aussagen.

1. If the file system is not locked, then
   (a) new messages will be queued.
   (b) new messages will be sent to the message buffer.
   (c) the system is functioning normally, and conversely.
2. If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.
3. New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

(a) Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie die folgenden vier Aussagen:
L für „file system locked“;
Q für „new messages are queued“;
B für „new messages are sent to the message buffer“;
N für „system functioning normally“.

(b) Die Spezifikation ist konsistent, wenn es eine Zuweisung von Wahrheitswerten zu den Aussagen gibt, so daß jeder der logischen Ausdrücke wahr ist. Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um festzustellen, ob die Spezifikation konsistent ist.

[1] Rosen, Seite 19, Aufgabe 1.1.48.

(c) Verwenden Sie eine einfache Argumentation mit einer Fallunterscheidung, um eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Aussagen zu finden, die bestätigt, daß die Systemspezifikation konsistent ist. Begründen Sie, warum es nur eine solche Zuordnung gibt.

Lösung:

(a) Die fünf zusammengesetzten Aussagen unter 1.(a), 1.(b), 1.(c), 2. und 3. werden mit den vier atomaren Aussagen L, Q, B und N formuliert.

- 1.(a) wird zu: $\neg L \rightarrow Q$
- 1.(b) wird zu: $\neg L \rightarrow B$
- 1.(c) wird zu: $\neg L \leftrightarrow N$
- 2. wird zu: $\neg Q \rightarrow B$
- 3. wird zu: $\neg B$

(b) Wir haben vier atomare Aussagen. Eine Wahrheitstafel hat also 16 Zeilen, damit alle möglichen Belegungen der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten enthalten sind. Für jede der 16 Zeilen müssen wir die Wahrheitswerte der obigen 5 Aussagen bestimmen. Wenn es (mindestens) eine Zeile gibt, in der die 5 Aussagen alle wahr sind, dann sind die Spezifikationen konsistent. Ist aber in jeder Zeile der Wahrheitstafel mindestens eine der obigen Aussagen falsch, dann enthalten die Spezifikationen einen inneren Widerspruch, da sie nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind, d.h. die Spezifikationen sind inkonsistent.

Stellt man die Wahrheitstafel auf, so zeigt sich, daß bei genau einer Belegung von L, Q, B und N mit Wahrheitswerten alle Spezifikationen erfüllt werden können, d.h. die Spezifikationen sind konsistent.

(Das Aufstellen einer Wahrheitstabelle dieser Größe ist mühsam. Kann man das nicht per Programm machen? Ja! Siehe Zusatzaufgabenblatt 1.)

(c) Fallunterscheidung

Fall 1: B ist wahr.
Dann ist die letzte Formel ($\neg B$) falsch. Eine konsistente Spezifikation ist damit nicht möglich, so daß wir Fall 1 nicht weiter zu untersuchen brauchen.

Fall 2: B ist falsch.
Die Aussagen 1.(b) und 2. können nur dann wahr sein, wenn $\neg L$ und $\neg Q$ falsch, d.h. L und Q wahr sind.

Wenn L wahr ist, d.h. $\neg L$ falsch, dann kann Aussage 1.(c) nur wahr sein, wenn N falsch ist. Die Spezifikationen können also nur konsistent sein, wenn L wahr, Q wahr, B falsch und N falsch ist.

Wir sind noch nicht fertig!

Wir wissen: die Aussagen 1.(b), 1.(c), 2. und 3. sind wahr. Aber 1.(a) muß noch überprüft werden! Bei der hergeleiteten Belegung von L, Q, B und N ist aber auch 1.(a) wahr.

Also ist das System konsistent, und darüberhinaus ist die Belegung der atomaren Aussagen eindeutig.