Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Wahrheitstafeln

(a) $A \leftrightarrow B$ ist logisch äquivalent zu $(A \to B) \wedge (B \to A)$,

(b) $A \to B$ ist logisch äquivalent zu $\neg A \vee B$,

(c) $A \vee B$ ist logisch äquivalent zu $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Also kann man jede zusammengesetzte Aussage nur mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ formulieren. Denn falls die Junktoren $\vee$, $\to$ oder $\leftrightarrow$ vorkommen, ersetzt man zunächst $\leftrightarrow$, dann $\to$ und schließlich $\vee$ entsprechend den obigen logischen Äquivalenzen.

Ist es mögliche, jede zusammengesetzte Aussage nur unter Verwendung der beiden Junktoren $\neg$ und $\vee$ zu formulieren?

Aufgabe 2

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, daß die folgenden zusammengesetzten Aussagen immer wahr sind, unabhängig davon, mit welchen Wahrheitswerten die Teilaussagen belegt sind:

(a) $A \vee (\neg A)$,
Satz vom ausgeschlossenen Dritten,

(b) $\neg(A \wedge (\neg A))$,
Satz vom Widerspruch,

(c) $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$,
Satz von der doppelten Verneinung,

(d) $(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$,
$(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$,
Sätze von De Morgan,

(e) $((A \to B) \wedge A) \to B$,
Satz zum modus ponens, Abtrennungsregel,

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(f) $((A \to B) \wedge (\neg B)) \to (\neg A)$,
Satz zum modus tollens, Widerlegungsregel,

(g) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$,
Satz zum modus barbara, Kettenschlußregel.

Aufgabe 3

In einem technischen Dokument stehen die folgenden[1] Aussagen.

1. If the file system is not locked, then
   (a) new messages will be queued.
   (b) new messages will be sent to the message buffer.
   (c) the system is functioning normally, and conversely.
2. If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.
3. New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

(a) Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie die folgenden vier Aussagen:
L für „file system locked“;
Q für „new messages are queued“;
B für „new messages are sent to the message buffer“;
N für „system functioning normally“.

(b) Die Spezifikation ist konsistent, wenn es eine Zuweisung von Wahrheitswerten zu den Aussagen gibt, so daß jeder der logischen Ausdrücke wahr ist. Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um festzustellen, ob die Spezifikation konsistent ist.

(c) Verwenden Sie eine einfache Argumentation mit einer Fallunterscheidung, um eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Aussagen zu finden, die bestätigt, daß die Systemspezifikation konsistent ist. Begründen Sie, warum es nur eine solche Zuordnung gibt.

[1] Rosen, Seite 19, Aufgabe 1.1.48.