Funktionen 6

- Beispiele: Der Grenzwertbegriff anhand dreier Funktionen,
  - Normalparabel,
  - Funktion mit Sprungstelle,
  - $y(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $y(x) = \sin(1/x)$ für $x > 0$.
- Definition

  Die Funktion f sei definiert auf einer Umgebung $(c, a) \cup (a, b)$ von a. Wir sagen, daß f im Punkt a den ***Grenzwert*** g hat, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$ für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ und $x_n \in (c, a) \cup (a, b)$ gilt.

  Schreibweise: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$.
- Beispiele (s.o.)
- Definition (Rechtsseitiger Grenzwert)

  Die Funktion f mit $(a, b) \subseteq D(f)$ hat in a den ***rechtsseitigen Grenzwert*** g, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$ für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ und $x_n \in (a, b)$ gilt.

  Schreibweise: $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = g$ oder $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = g$.
- Anmerkung: Linksseitiger Grenzwert analog.
- Anmerkung: Wenn sowohl der rechtsseitige als auch der linksseitige Grenzwert existiert, und beide Werte stimmen überein,

  $$\lim_{x\to a+0} f(x) = g = \lim_{x\to a-0} f(x),$$

  dann existiert der Grenzwert

  $$\lim_{x\to a} f(x) = g.$$
- Beispiele (s.o.)
- Beispiel: Diskussion der verschiedenen möglichen Fälle anhand der Skizze einer Funktion.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Anmerkung (uneigentliche Grenzwerte):

  (a) Ist für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ die Folge $(f(x_n))$ bestimmt divergent, schreibt man

  $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

  Entsprechend bei rechts- bzw. linksseitiger Annäherung.

  (b) Ist f definiert auf (a, ∞) und gilt $f(x_n) \to g$ $(n \to \infty)$ für jede bestimmt divergente Folge (x_n) (also $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$), dann Schreibweise

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = g.$$

  Entsprechend für $x \to -\infty$.
  Diese Schreibweise wird auch im Falle $g = \pm\infty$ verwendet.

- Beispiele

- Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)
  Es sei $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$ und $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \gamma$. Dann gilt:

  (a) $\lim\limits_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot g \qquad (k \text{ konstant}),$

  (b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = g \pm \gamma,$

  (c) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = g \cdot \gamma,$

  (d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{g}{\gamma}, \qquad \text{falls } \gamma \neq 0,$

  (e) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g},$

  (f) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = g^n.$

  Analog für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
  (ohne Bew.)

- Beispiele

- Definition (Stetigkeit)
  Die Funktion f heißt ***stetig an der Stelle*** $a \in D(f)$, wenn

  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

  gilt. f heißt ***stetig***, wenn f in jedem Punkt von $D(f)$ stetig ist.

- Anmerkung: Wir haben Stetigkeit in a, wenn
  1. die Funktion in a definiert ist,
  2. der Grenzwert in a existiert,
  3. der Grenzwert gleich dem Funktionswert ist.
- Skizze
- Anmerkung: Anschaulich ist eine Funktion stetig, wenn ihr Graph „in einem Zug“ („ohne abzusetzen“) gezeichnet werden kann.
- Anmerkung: Die Eigenschaft der Stetigkeit sorgt dafür, daß eine Funktionskurve sich nicht mehr beliebig ändern darf. Uneingeschränkte „Sprünge“ sind nicht mehr erlaubt. Aber auch bei stetigen Funktionen kann der Graph „Ecken“ enthalten, also Stellen, an denen keine Steigungswerte sinnvoll definiert werden können. Soll der Graph aber in jedem seiner Punkte — anschaulich gesprochen — eine „Steigung“ besitzen, will man also noch größere Regelmäßigkeit haben, ist eine stärkere Forderung nötig: die Differenzierbarkeit.