Funktionen 5

- Definition

  Es sei $b > 0$ und $b \neq 1$. Die Umkehrfunktion zu $y = b^x$ heißt ***Logarithmus zur Basis*** **b**, geschrieben $f(x) = \log_b x$. Der Definitionbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen, $D(f) = (0, \infty)$.

  Die Umkehrfunktion zur e-Funktion wird als ***natürlicher Logarithmus*** bezeichnet und $f(x) = \log_e x = \ln x$ geschrieben.

- Anmerkung: Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln, wobei $b > 0$ und $b \neq 1$ sowie x, x_1, $x_2 > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ sei.

$$\begin{aligned} \log_b(x_1 \cdot x_2) &= \log_b x_1 + \log_b x_2 \\ \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_b x_1 - \log_b x_2 \\ \log_b(x^r) &= r \log_b x \end{aligned}$$

  Ferner ist $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$ sowie $b^{\log_b x} = x$ und $\log_b b^x = x$.

- Anmerkung: Besonders oft wird die Beziehung

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln x}$$

  verwendet, die für $x > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

- Definition

  Wir definieren die ***Winkelfunktionen*** (auch ***trigonometrische Funktionen*** genannt) Sinus, Cosinus und Tangens geometrisch am Einheitskreis.

- Skizze

- Gradmaß und Bogenmaß.

- Anmerkung: Es ist $\sin(30°) = 1/2$ sowie $\sin(45°) = \sqrt{2}/2$ und $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$. Durch Symmetrieüberlegungen kann man dies auf andere Winkel und auf die Cosinusfunktion übertragen.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Satz

  Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

  Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

- Satz (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

  (a) Periodizität
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (2π-periodisch)
  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (2π-periodisch)
  $\tan(x + \pi) = \tan x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x|\ \cos x = 0\}$ (π-periodisch)

  (b) Symmetrie
  $\sin(-x) = -\sin x$
  $\cos(-x) = \cos x$
  $\tan(-x) = -\tan x$

  (c) Nullstellen
  $\sin(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$
  $\cos(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$
  $\tan(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x_n) = 0$

  (d) Pole
  $\tan(x_n) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x_n) = 0$

- Satz (Additionstheoreme der Winkelfunktionen)

  Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$