Funktionen 4

- Definition

  Der Quotient zweier Polynome

  $$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m}$$

  heißt ***gebrochenrationale Funktion***. Der Definitionsbereich ist

  $$D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \neq 0\}.$$

  Für $m > n$ ist die Funktion *echt* gebrochenrational, für $m \leq n$ *unecht* gebrochenrational.

- Anmerkung: Haben das Zähler- und das Nennerpolynom eine gemeinsame Nullstelle x_0, so kann man den Linearfaktor $(x - x_0)$ kürzen. Die Definitionslücke an der Stelle x_0 wird dadurch behoben.

  Hat man so weit wie möglich gekürzt, haben Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsame Nullstelle mehr. Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind dann die Nullstellen der gebrochenrationalen Funktion. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Polstellen (Unendlichkeitsstellen).

- Anmerkung: Ist $r(x)$ unecht gebrochenrational, kann man die Funktion durch Polynomdivision—bei der man den Zähler durch den Nenner teilt—in

  $$r(x) = p(x) + g(x)$$

  zerlegen, wobei p ein Polynom und g eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Für wachsendes x werden die Werte von $g(x)$ immer kleiner, unabhängig vom Vorzeichen von x, so daß sich die Kurve von r immer dichter an die Kurve von p anschmiegt. Man nennt p deshalb die Asymptote von r im Unendlichen.

- Definition

  Funktionen $f(x) = x^a$ mit konstantem Exponenten a und variabler Basis x heißen ***Potenzfunktionen***. Im allgemeinen Fall, also für beliebige reelle Exponenten a, sind sie für positive x definiert.

- Anmerkung: In wichtigen Fällen erweitert sich der Definitionsbereich. Dazu seien nur Zahlen aus bestimmten Teilmengen von $\mathbb{R}$ für die Exponenten zugelassen.
  - Natürliche Zahlen: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.
  - Negative ganze Zahlen: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  - Ist n *gerade*, sind die Funktionen $y = x^n$ für $x \geq 0$ streng monoton, also auf dem Intervall $[0, \infty)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind die ***Wurzelfunktionen*** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n gerade. Definitionbereich ist $D(f) = [0, \infty)$.
  - Ist n *ungerade*, sind die Funktionen $y = x^n$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton und somit umkehrbar. Umkehrfunktionen sind die ***Wurzelfunktionen*** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

- Anmerkung: Man beachte die Rechenregeln für Potenzen. Für x, x_1, $x_2 > 0$ und a, $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} = (x^b)^a \\ x_1^a \cdot x_2^a &= (x_1 \cdot x_2)^a \end{aligned}$$

  Speziell mit m, $n \in \mathbb{N}$ gilt für Wurzeln

$$\begin{aligned} x^{m/n} &= \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2} &= \sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \end{aligned}$$

- Definition

  Funktionen vom Typ $f(x) = b^x$ mit konstanter Basis $b > 0$ und $b \neq 1$ heißen ***Exponentialfunktionen***. Der Exponent x ist variabel und darf beliebige reelle Werte annehmen, d.h. der Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

  Von besonderer Bedeutung ist die Exponentialfunktion mit der Basis e, die **e-*Funktion***

$$y = e^x = \exp(x).$$

  Näherungsweise ist $e \approx 2,71$.

- Anmerkung: Man beachte, daß speziell die Rechenregeln $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ und $e^a/e^b = e^{a-b}$ sowie $(e^a)^b = e^{ab}$ gelten.