Funktionen 3

- Verschiebung von Funktionen

  Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll im x-y-Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht verschoben werden. Die Strecke der Verschiebung soll die Länge k mit $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ haben.

- Senkrechte Verschiebung

  $f(x) + k$ verschiebt f um k nach oben.

  $f(x) - k$ verschiebt f um k nach unten.

- Waagrechte Verschiebung

  $f(x - k)$ verschiebt f um k nach rechts.

  $f(x + k)$ verschiebt f um k nach links.

- Beispiele

- Streckung/Stauchung von Funktionen

  Die Kurve der Funktion $y = f(x)$ soll im x-y-Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht gestreckt bzw. gestaucht werden.

- Senkrechte Streckung/Stauchung

  $k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ streckt in y-Richtung auf das k-fache.

  $k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ staucht in y-Richtung auf das k-fache.

- Waagrechte Streckung/Stauchung

  $f(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$ streckt in x-Richtung auf das $(1/k)$-fache.

  $f(kx)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ staucht in x-Richtung auf das $(1/k)$-fache.

- Beispiele

- Was geschieht bei $g(x) = -2,5 \cdot f(x)$ oder $h(x) = f(-0,5 \cdot x)$?

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Definition

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

  $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

  wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, heißt ***Polynom* n*-ten Grades*** oder ***ganzrationale Funktion***. Die $a_0, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) heißen ***Koeffizienten***.

- Anmerkung: Spezialfälle sind die konstante, lineare, quadratische und kubische Funktion, sowie allgemein die Potenzfunktion $y = x^n$ mit natürlichem Exponenten n.

- Satz

  Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade n und x_1 eine Nullstelle von f, d.h. $f(x_1) = 0$. Dann ist

  $$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$$

  mit dem 1. reduzierten Polynom f_1, das den Grad $n - 1$ hat, und dem Linearfaktor $(x - x_1)$.

- Anmerkung: Man berechnet f_1 durch eine Polynomdivision, bei der f durch $(x - x_1)$ geteilt wird.

- Satz

  Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

  Hat es genau n reelle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt

  $$\begin{aligned} f(x) &= a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

- Lineare Funktionen

  Der Graph einer linearen Funktion ist eine ***Gerade***. Ist eine lineare Funktion in der Form $y = mx + b$ gegeben, so ist m die Steigung der Geraden und b der Abschnitt auf der y-Achse. (Skizze zeichnen!)

  Wird eine Gerade durch ihre Steigung m und durch einen Punkt $P_1(x_1|y_1)$ auf der Geraden definiert, erhält man die zugehörige Funktion wie folgt: Es sei $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt ungleich P_1 auf der Geraden. Die Steigung ist dann die Differenz der y-Werte geteilt durch die Differenz der x-Werte

  $$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}\,.$$

  (Skizze zeichnen!)

Ist eine Gerade durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben, ist die Steigung zwischen P_1 und P_2 gleich der Steigung zwischen P_1 und P, also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

(Skizze zeichnen!)

- Quadratische Funktionen

  Der Graph einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist eine ***Parabel***. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten.

  Hat die Parabel Schnittpunkte mit der waagrechten Achse, berechnet man die Koordinaten durch Lösen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Wenn die Parabel keine Schnittpunkte mit der waagrechten Achse hat, erhält man beim Lösen der quadratischen Gleichung eine Wurzel aus einer negativen Zahl.