Funktionen 2

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

  Eine Funktion heißt

  gerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

  ungerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

  monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

  streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

  monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

  streng monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

  (streng) monoton $\Leftrightarrow$ f (streng) monoton wachsend oder fallend;

  periodisch $\Leftrightarrow$ existiert ein $p > 0$ mit $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

  beschränkt $\Leftrightarrow$ existiert ein $k > 0$ mit $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in D(f)$.

- Veranschaulichungen und Beispiele.

- Beispiele: Wir betrachten die Graphen

  – der Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$,
  – der Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$,
  – der Winkelfunktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$.

  Siehe die Abbildungen auf den folgenden Seiten.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

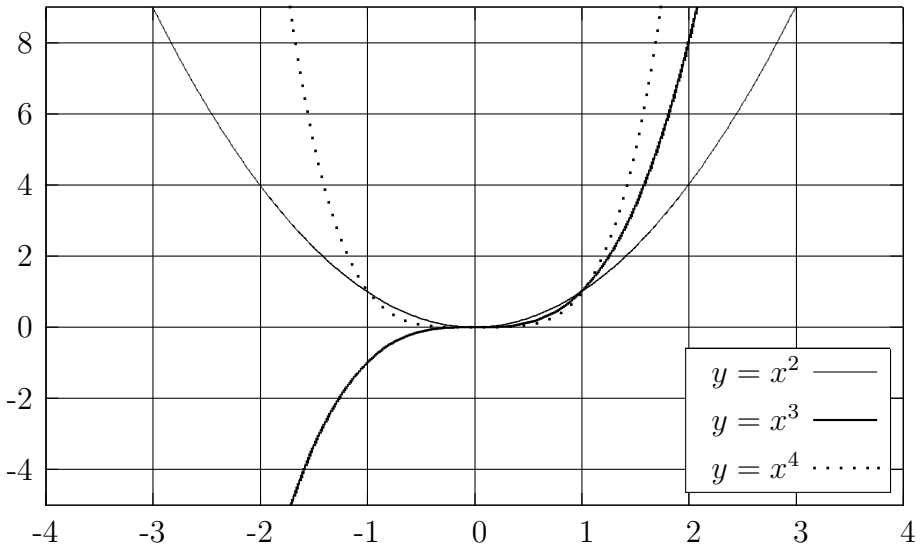

Abbildung 1: Potenzfunktionen

- Definition (umkehrbare Funktion)

  Eine Funktion f heißt ***umkehrbar***, wenn aus x_1, $x_2 \in D(f)$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.

- Skizze, graphische Interpretation.

- ***Umkehrfunktion*** graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

- ***Umkehrfunktion*** rechnerisch: $y = f(x)$ nach x auflösen (falls möglich); dann x und y vertauschen.

- Beispiele

- Anmerkung: Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion zu f ist gleich dem Wertebereich von f.

- Satz

  Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.

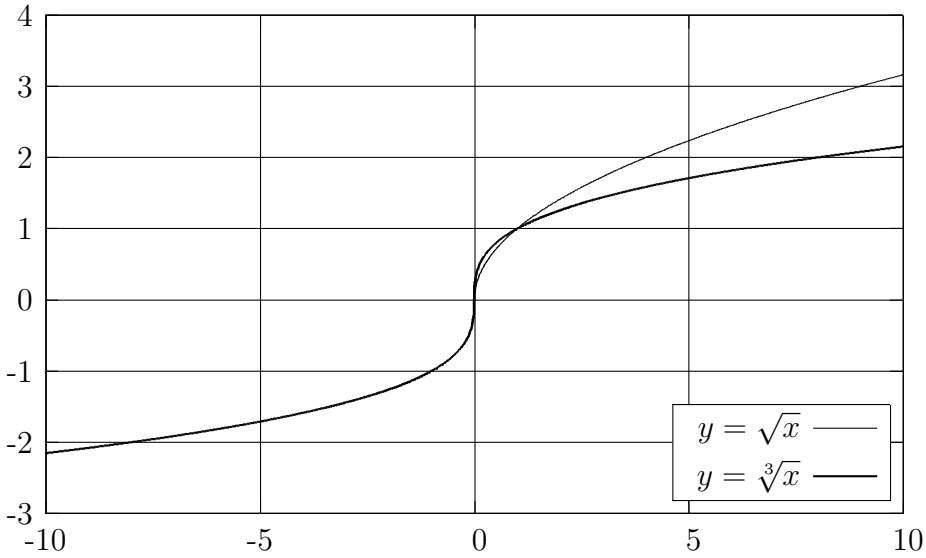

Abbildung 2: Wurzelfunktionen

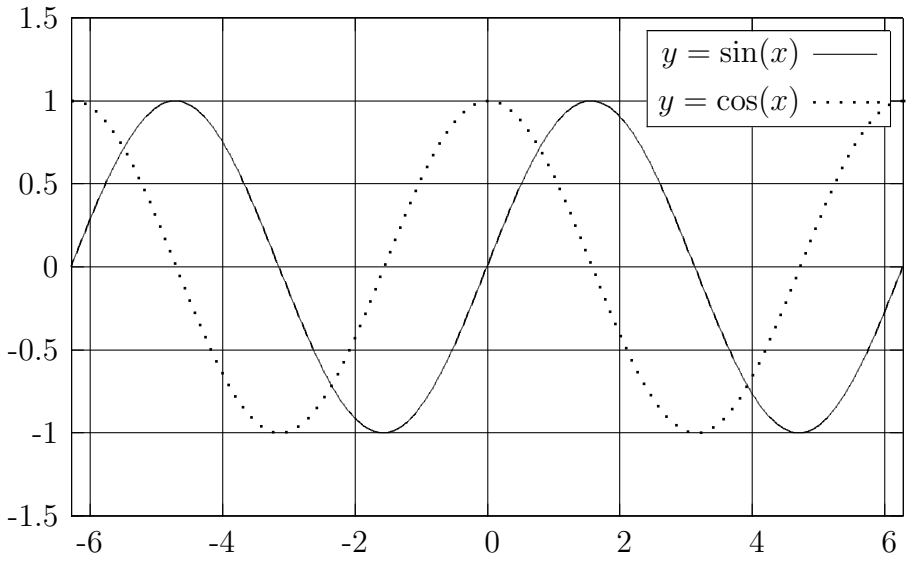

Abbildung 3: Winkelfunktionen