Funktionen 1

- Beispiele:
  - Abbildung von Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach Teilmenge von $\mathbb{R}$;
  - Abbildung sechsstelliger Zahlen auf Zeichenketten (interpretiert als Matrikelnummern und Namen).
- Definition (Funktion)

  Es seien A und B Mengen. Eine ***Funktion*** (oder *Abbildung*) f von A nach B,
  $$f : A \longrightarrow B$$
  ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Schreibweise:
  $$y = f(x).$$
  Dabei heißt x die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable.

  Die Menge A heißt ***Definitionsbereich*** (oder *Definitionsmenge*) von f, geschrieben $D(f)$. Die Menge $\{y|\, y = f(x),\ x \in A\} \subseteq B$ heißt ***Wertebereich*** (oder *Wertemenge*, *Bildmenge*) von f, kurz $W(f)$.
- Skizzen:
  (a) Darstellung von $y = f(x)$,
  (b) $f(a) = f(b)$ ist erlaubt,
  (c) ein Beispiel für eine nicht erlaubte Zuordnung,
  (d) Parameterdarstellung einer Funktion.
- Definition (Graph)

  Der ***Graph*** einer Funktion $f : A \longrightarrow B$ ist die Menge der geordneten Paare $\{(x, y)|\, x \in A \text{ und } f(x) = y\}$.
- Beispiele (Skizzen):
  (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
  (b) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Anmerkung (Gleichheit zweier Funktionen): Es sei $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$. Dann ist $f_1 = f_2$ genau dann, wenn $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 = A_2$ gilt.

- Anmerkung: Der Graph einer Funktion $f : A \longrightarrow B$ ist eine spezielle Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. Charakteristisch für den Funktionsbegriff ist, daß es zu jedem $x \in A$ genau ein Paar $(x, y) \in A \times B$ mit x als erstem Element gibt. Dies kann man für eine alternative Definition des Funktionsbegriffs nutzen; dabei unterscheidet man nicht mehr zwischen „Abbildung“ und „Graph“.

  Es seien A und B Mengen. Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ ist eine Teilmenge G von $A \times B$ mit der Eigenschaft: zu jedem $x \in A$ existiert genau ein $y \in B$ derart, daß $(x, y) \in G$ ist. Wir schreiben $y = f(x)$.

- Beispiele:

  $A =$ Menge der Matrikelnummern, die zur Zeit im Gebrauch sind.

  (a) $B =$ Menge aller Zeichenketten,

  (b) $B =$ Menge aller Nachnamen von Studenten/Studentinnen,

  (c) $B =$ Menge aller Menschen,

  (d) $B =$ Menge aller Studenten/Studentinnen.

- Definition

  Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion.

  (a) f heißt ***injektiv***, falls aus $f(a) = f(b)$ mit $a, b \in A$ folgt: $a = b$.

  (b) f heißt ***surjektiv***, falls $W(f) = B$.

  (c) f heißt ***bijektiv***, falls f injektiv und surjektiv ist.

- Graphische Beispiele mit endlichen Definitions- und Wertebereichen.

- Beispiele (endliche und unendliche Definitions- und Wertebereiche).

- Satz

  Es seien A und B endliche Mengen mit $|A| = |B|$, und es sei $f : A \longrightarrow B$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

  (a) f ist injektiv,

  (b) f ist surjektiv,

  (c) f ist bijektiv.

- Beweis