Reihen

- Die endliche Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ wird auch als
$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$
geschrieben. Bei systematisch aufgebauten Summanden a_n kann es Formeln zur Berechnung des Summenwertes geben. Ein bekanntes Beispiel geht auf Gauß zurück.

- Satz (Gaußsche Summenformel)

  Es gilt:
$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}\,.$$

- Geht man—anschaulich gesprochen—von einer endlichen Summe zu einer unendlichen Summe über, so erhält man eine Reihe.

- Definition

  Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so heißt der Ausdruck
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
eine ***Reihe***. Die a_n heißen die ***Glieder*** der Reihe.

- Anmerkung: Die Ausführung unendlich vieler Additionen ist nicht möglich. Wir betrachten deshalb die Folge (s_m) der endlichen ***Partialsummen***
$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

- Definition

  Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt ***konvergent*** zur Summe s, wenn die Folge $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ der Partialsummen $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ gegen s konvergiert, d.h. wenn der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} s_m = s$ existiert.

  Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

  Die Reihe heißt ***divergent***, wenn die Folge (s_m) keinen endlichen Grenzwert besitzt.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Beispiele:
  - harmonische Reihe,
  - geometrische Reihe.
- Satz

  Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist für $|q| < 1$ konvergent und für $|q| \geq 1$ divergent. Es gilt
  $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1.$$
- Anmerkung: Daraus folgt unmittelbar, daß $\sum_{n=0}^{\infty} kq^n = \frac{k}{1-q}$ für $|q| < 1$ gilt.
- Beweis
- Anmerkung: Der Beweis liefert auch eine Formel für die Berechnung endlicher geometrischer Reihen.
- Satz

  Es gilt
  $$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$
  für beliebige Werte von q.
- Beispiele
- Beispiele für konvergente nicht-geometrische Reihen (ohne Herleitung).
  $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots = \frac{\pi}{4}$$
  $$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e$$
  $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
  $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots = \ln 2$$