Binomialkoeffizienten und Binomische Formel

- Definition (Binomialkoeffizient)

  Das Symbol $\binom{n}{k}$ heißt ***Binomialkoeffizient*** (gelesen „n über k“), und ist durch
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$
  für $n,\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n \geq k$ definiert.

- Anmerkung

  Für die Berechnung ist oft folgende Regel vorteilhaft: $\binom{n}{k}$ ist ein Bruch mit jeweils k Faktoren im Zähler und im Nenner, im Zähler beginnend bei n und absteigend, im Nenner beginnend bei 1 und aufsteigend.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\overbrace{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}^{=(n-k)!}}{(n-k)!\,k!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\end{aligned}$$

- Beispiele

- Satz (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten)

  (a) $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{n} = 1,$

  (b) $\binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{n-1} = n,$

  (c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$

  (d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

- Pascalsches Dreieck.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Beweis des Satzes.
- Spezielle binomische Formeln.

$$\begin{array}{lcl} (a+b)^0 & = & 1 \\ (a+b)^1 & = & a+b \\ (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ & \text{u.s.w.} & \end{array}$$

  Die Koeffizienten der binomischen Formeln entsprechen den Binomialkoeffizienten, wie sie im Pascalschen Dreieck angeordnet sind.

- Satz (Binomische Formel)

$$(a+b)^n$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

- Anmerkung: Der Beweis der allgemeinen binomischen Formel erfolgt mit vollständiger Induktion nach n.
- Satz

  Eine Menge von n Elementen hat 2^n Teilmengen.

- Beweis: mit Hilfe einer Summe von Binomialkoeffizienten und der Binomischen Formel.