Kombinatorik 1

- Beim Mittagessen in der Mensa haben wir die Auswahl aus drei Menüs, vier Salaten und zwei Desserts. Wieviele Möglichkeiten der „Belegung“ der Teller gibt es insgesamt?

- Satz

  Es sollen k Positionen $P_1, \ldots, P_k$ vorliegen. Es gebe

  n_1 Möglichkeiten, P_1 zu belegen,
  n_2 Möglichkeiten, P_2 zu belegen,
  $\vdots$
  n_k Möglichkeiten, P_k zu belegen.

  Dann gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Belegungsmöglichkeiten.

- Sie wollen drei Poster (Jennifer Lopez, Robbie Williams und Felix der Hase) nebeneinander an die Wand hängen. Wieviele unterschiedliche Reihenfolgen gibt es?

- Definition (Permutation)

  Eine n-stellige ***Permutation*** ist eine Anordnung von n paarweise verschiedenen Elementen zu einem n-Tupel.

  Zu n paarweise verschiedenen Elementen bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller n-stelligen Permutationen.

- Beispiel: Elemente a, b, c. Gesucht sind alle 3-stelligen Permutationen in lexikographischer Anordnung.

- Definition (n-Fakultät)

  Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird als **n-*Fakultät*** bezeichnet und $n!$ geschrieben:

  $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

- Satz

  $$p(n) = n!$$

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Beweis
- Beispiele:
  - J.Lo, Robbie und Felix;
  - Start verschiedener Programme zur Initialisierung eines Rechners.
- Unter den 60 Personen im Hörsaal werden drei Preise (Eintrittskarten) verlost (Erstsemesterfete, Spiel der Eintracht Frankfurt, Konzert von Shakira). Dazu werden nacheinander drei Personen herausgegriffen. Zunächst wird der dritte, dann der zweite und schließlich der erste Preis vergeben. Da die Preise unterschiedlich viel wert sind, ist die Reihenfolge beim Herausgreifen wichtig. Wieviel Ziehungsergebnisse sind möglich?
- Definition (Variation ohne Wiederholung)

  Es sei M eine Menge mit n Elementen, und es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Eine ***Variation* k*-ter Ordnung von* n *Elementen ohne Wiederholung*** ist ein k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_1, \ldots, a_k \in M$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$.

  $v(n, k)$ bezeichne die Anzahl dieser Variationen.
- Anmerkung: Der Spezialfall $k = n$ gibt eine n-stellige Permutation, also ist $v(n, n) = p(n) = n!$.
- Beispiel: Mengen $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{a, b, c\}$ und $M_3 = \{a, b, c, d\}$; jeweils alle Variationen 2. Ordnung auflisten; Werte von $v(2, 2)$, $v(3, 2)$ und $v(4, 2)$ bestimmen.
- Satz

$$v(n, k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

- Anmerkung: $\binom{n}{k}$ ist eine Abkürzung für $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.
- Beweis
- Beispiel: Verlosung von drei unterschiedlichen Preisen unter 60 Personen; Anzahl Ziehungsergebnisse: $v(60, 3)$.