Zahlenmengen

- Wir verwenden spezielle Symbole für die wichtigsten Mengen von Zahlen:
  - ***natürliche Zahlen***: $\mathbb{N}$,
  - ***ganze Zahlen***: $\mathbb{Z}$,
  - ***rationale Zahlen***: $\mathbb{Q}$,
  - ***reelle Zahlen***: $\mathbb{R}$,
  - ***komplexe Zahlen***: $\mathbb{C}$.

  Hierbei sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wollen wir die Null dazunehmen, schreiben wir $\mathbb{N}_0$, also $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

  Es gilt
  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$
  Insbesondere gibt es Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind.

- Satz

  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Mit anderen Worten, $\sqrt{2}$ ist irrational.

- Anmerkung: Unter den natürlichen Zahlen spielen die Primzahlen eine besondere Rolle. Dies sind alle Zahlen größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

- Satz

  Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Im folgenden führen wir die ***komplexen Zahlen*** ein. Zunächst machen wir uns klar, warum die reellen Zahlen nicht ausreichen; dann betrachten wir die vier Grundrechenarten für die komplexen Zahlen.

- Problemstellung: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung.

- Skizze; andere quadratische Gleichungen ohne reelle Lösung.

- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von $\mathbb{R}$ (ähnlich: Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$).

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Definition

  Das Symbol i sei eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$. Wir nennen i die ***imaginäre Einheit***.

- Anmerkung: In den Ingenieurwissenschaften verwendet man statt i das Symbol j, weil i in der Elektrotechnik für die Stromstärke steht.

- Anmerkung: Das Rechnen mit i „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. $2i$, $\frac{5}{2}\,i$ und $(-\frac{7}{3})i$. Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. $6 + 2i$ oder $5 - \frac{7}{3}\,i$.

  Diese Einführung der komplexen Zahlen ist nicht mathematisch streng, reicht aber als Einstieg für unsere Zwecke aus.

- Definition

  Zahlen der Gestalt bi mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ heißen ***(rein) imaginäre Zahlen***.

  Zahlen der Form $a + bi$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ heißen ***komplexe Zahlen***. Wir bezeichnen

  $$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi;\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$$

  als ***Menge der komplexen Zahlen***.

  Zu $z = a + bi$ heißt $a = \mathrm{Re}(z)$ der ***Realteil*** von z und $b = \mathrm{Im}(z)$ der ***Imaginärteil*** von z.

- Anmerkung: Man beachte, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine reelle Zahl ist.

- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Anmerkung: Es gilt

  $$\begin{aligned} a + bi = c + di \quad &\Leftrightarrow \quad a = c \text{ und } b = d, \\ c + di = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ und } d = 0, \\ c + di \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad c^2 + d^2 \neq 0. \end{aligned}$$

  Ferner ist $a + 0i = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$, also gilt auch $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Anmerkung: Man beachte, daß in $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation definiert ist. D.h. $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ machen bei Zahlen aus $\mathbb{C}$, die nicht zur Teilmenge $\mathbb{R}$ gehören, keinen Sinn.

- Darstellung der komplexen Zahlen in der ***komplexen Ebene*** (Gaußschen Ebene).

- Geometrische Veranschaulichung von Addition und Subtraktion.

- Zahlenbeispiele für das Rechnen in $\mathbb{C}$.