# Logik 2

- Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie, nennt man die—eventuell zusammengesetzten—Aussagen $A$ und $B$ ***logisch äquivalent***. Für alle möglichen Belegungen der in $A$ und $B$ vorkommenden atomaren Aussagen stimmen dabei die Wahrheitswerte von $A$ und $B$ überein.

  Mit solchen Tautologien kann man Gesetze der Aussagenlogik formulieren; dabei wird zu einem logischen Ausdruck ein logisch äquivalenter Ausdruck angegeben.

  Bei logisch äquivalenten Ausdrücken, also bei einer Tautologie $A \leftrightarrow B$, schreibt man auch $A \Leftrightarrow B$ oder $A = B$ oder $A \equiv B$.

- Satz (Einige Gesetze der Aussagenlogik)

  $A$, $B$ und $C$ seien Aussagen.

  (a) ***Kommutativität*** bei Konjunktion und Disjunktion

  $$A \wedge B \equiv B \wedge A$$
  $$A \vee B \equiv B \vee A$$

  (b) ***Assoziativität*** bei Konjunktion und Disjunktion

  $$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$
  $$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

  (c) ***Distributivität***

  $$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
  $$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

  (d) ***doppelte Verneinung***

  $$\neg(\neg A) \equiv A$$

  (e) ***Kontraposition***

  $$A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A)$$

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(f) ***Regeln von de Morgan*** bei der Negation einer Konjunktion bzw. Disjunktion

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- Beweis der Gesetze mit Wahrheitstafeln.
- Wieviele zweistellige Verknüpfungen von Aussagen sind möglich? Kann man alle zweistelligen Verknüpfungen von Aussagen mit den fünf Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ darstellen?
- Anmerkung: Neben den fünf Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ sind noch weitere logische Operatoren gebräuchlich,

  (a) das Ausschließende Oder: $\oplus$ (engl.: exclusive or, XOR),

  (b) der Sheffer-Operator: $|$ (engl.: Sheffer stroke, NAND),

  (c) der Peirce-Operator: $\downarrow$ (engl.: Peirce arrow, NOR),

  wobei NAND aus „not and“ gebildet wurde und NOR aus „not or“.
- Anmerkung: Man kann zeigen, daß alle zweistelligen Verknüpfungen von Aussagen mit einem einzigen Operator geschrieben werden können. Dies geht sowohl mit dem Sheffer- als auch mit dem Peirce-Operator.