FH Gießen-Friedberg, FB 06 (MNI) Übungsblatt 8
Diskrete Strukturen 19. Januar 2009
Prof. Dr. H.-R. Metz

Aufgabe 1

Es sei M eine Menge mit n Elementen. Wieviele Abbildungen von $M \times M$ nach M gibt es?
Angenommen, jemand will diese Aufgabe durch Experimentieren am Rechner lösen. Um einen kleinen Überblick zu bekommen, schreibt er ein Programm, das mit Hilfe von Schleifen alle inneren Abbildungen einer Menge durchläuft und bei jeder neuen Abbildung einen Zähler hochsetzt. Nehmen wir an, daß das Programm pro Abbildung nur ein Rechnertakt benötigt, was natürlich viel zu schnell ist, aber für eine erste optimistische Abschätzung taugt. Bei einem mit 1000 MHz getakteten Rechner dauert ein Takt 10^{-9} Sekunden. Wie lange dauert es, bis das Programm alle inneren Abbildungen einer Menge mit 10 Elementen gezählt hat? Wie lange dauert es bei 5 Elementen? Speicherplatzprobleme und ähnliches werden nicht berücksichtigt.

Aufgabe 2

Warum liegt keine algebraische Struktur in dem von uns definierten Sinne vor bei a) den natürlichen Zahlen mit der Subtraktion, b) den reellen Zahlen mit der Division, c) dem Skalarprodukt von Vektoren?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß durch $f((a,b)) = a^b$ eine innere Verknüpfung der natürlichen Zahlen gegeben ist, die weder assoziativ noch kommutativ ist.

Aufgabe 4

Es sei $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Zeigen Sie, daß $\mathcal{P}(M)$ mit der Mengenoperation der Durchschnittsbildung zu einer assoziativen und kommutativen algebraischen Struktur wird, ebenso mit der Operation der Mengenvereinigung. Zeigen Sie, daß mit der Mengensubtraktion eine algebraische Struktur entsteht, die weder assoziativ noch kommutativ ist.

Aufgabe 5

Es sei $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}$.

(a) Was ist $M \times M$?

(b) Warum ist die Abbildung $f((x,y)) = x+y$ mit $(x,y) \in M \times M$ keine innere Verknüpfung von M?

(c) Warum definiert $f((x,y)) = x \cdot y$ mit $(x,y) \in M \times M$ eine innere Verknüpfung von M? Stellen Sie diese Verknüpfung vollständig durch eine Tabelle dar. Zeigen Sie, daß es sich um eine abelsche Gruppe handelt.

Aufgabe 6

Für a, $b \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ sei die Verknüpfung $a * b = |a - b|$ definiert. Zeigen Sie, daß damit eine algebraische Struktur entsteht, die alle Gesetze einer Gruppe außer der Assoziativität erfüllt.

Aufgabe 7

Es sei M die Menge der $(n \times n)$-Matrizen. Durch die Bedingungen

$$\begin{array}{lll} \det(A) \geq 0, & \det(A) \geq 1, & \det(A) \geq 2, \\ \det(A) < 0, & \det(A) > 0, & \det(A) = 1 \end{array}$$

werden sechs Teilmengen von M definiert. Hierbei bezeichnet $\det(A)$ die Determinante der Matrix A.

Untersuchen Sie, welche dieser Teilmengen zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine algebraische Struktur, eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe bildet.

Hinweis: Für Determinanten von $(n \times n)$-Matrizen gilt

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Nullteiler von $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ für $n = 3, 4, \ldots, 10$.

Aufgabe 9

Berechnen Sie über dem Körper $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ die Determinante und die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie für die Inverse die Probe. (Alle Rechnungen sind modulo 5 durchzuführen.)