Aufgabe 1

Schreiben Sie die Verknüpfungstabellen der additiven Gruppen $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7$ auf.

Lösung:

- Verknüpfungstabelle der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_5$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

- Verknüpfungstabelle der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_6$

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

- Verknüpfungstabelle der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_7$

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Aufgabe 2

Die Menge $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ bildet mit der Addition modulo n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe. Wie verhält es sich bei der Multiplikation modulo n?

Schreiben Sie für $n = 3$, 4 und 5 die Verknüpfungstabellen von $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation modulo n auf. In welchen Fällen liegt eine Gruppe vor?

Lösung:

- Verknüpfungstabelle von $\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$

$\odot$	1	2
1	1	2
2	2	1

  Dies ist eine Gruppe. Man sieht sofort die Isomorphie zur multiplikativen Gruppe der zweiten Einheitswurzeln mit den Elementen 1 und -1.

- Verknüpfungstabelle von $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$

$\odot$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

  Da das Element 0 vorkommt, haben wir keine Verknüpfungsabgeschlossenheit und also auch keine Gruppe.

- Verknüpfungstabelle von $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

  Ist dies eine Gruppe?

Falls $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$ eine Gruppe ist, muß sie isomorph zu $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ sein, da es nur zwei Gruppen der Ordnung 4 gibt, und da bei der anderen Gruppe der Ordnung 4 (der Kleinschen Vierergruppe) alle Elemente autoinvers sind.

Wir schreiben $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ auf und daneben $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$, wobei die Elemente in einer Reihenfolge stehen, die eine Isomorphie erkennen lassen.

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

Die beiden Tabellen haben die gleiche Struktur, wie man zum Beispiel erkennen kann, wenn man ein Element nach dem anderen betrachtet. Dies verdeutlicht auch sehr anschaulich, was „Isomorphismus“ bedeutet: der Unterschied zwischen den beiden Tabellen kommt nur durch eine unterschiedliche Bezeichnung der Elemente zustande. Das „Wesentliche“ (nämlich die Struktur) stimmt überein.

$\oplus$	0			
0	0			
				0
			0	
		0		

$\odot$	1			
1	1			
				1
			1	
		1		

$\oplus$		1		
		1		
1	1			
				1
			1	

$\odot$		2		
		2		
2	2			
				2
			2	

$\oplus$			2	
			2	
		2		
2	2			
				2

$\odot$			4	
			4	
		4		
4	4			
				4

$\oplus$				3
				3
			3	
		3		
3	3			

$\odot$				3
				3
			3	
		3		
3	3			

Wir haben also zwei isomorphe Gruppen vorliegen. Ein Isomorphismus entsprechend den obigen Tabellen ist

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftrightarrow & 1 \\ 1 & \longleftrightarrow & 2 \\ 2 & \longleftrightarrow & 4 \\ 3 & \longleftrightarrow & 3 \end{array}$$

Als Endergebnis können wir festhalten: $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \odot)$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 3
Welche der folgenden Verknüpfungstabellen stellt eine Gruppe dar?

(a)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	a	b
b	b	a	e	c
c	c	b	c	e

(b)

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

(c)

	0	1	-1	2	-2
0	0	1	-1	2	-2
1	1	2	0	3	-1
-1	-1	0	-2	1	-3
2	2	3	1	4	0
-2	-2	-1	-3	0	-4

Lösung:

(a) Keine Gruppe.

Bei einer Gruppe darf in keiner Zeile ein Element mehrfach vorkommen. Ebenso darf in keiner Spalte ein Element mehrfach auftreten. (Dies wurde in der Vorlesung gezeigt; es folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $ax = b$ bzw. $xa = b$.)

Hier kommt zum Beispiel in der zweiten Zeile das Element a zweimal vor.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt: Es gibt zwei Gruppen der Ordnung 4, die Kleinsche Vierergruppe und die Gruppe der vierten Einheitswurzeln.

Falls wir eine Gruppe vorliegen haben, muß sie isomorph zu einer dieser beiden Gruppen sein. Die Kleinsche Vierergruppe kommt nicht in Frage, da diese auf der Hauptdiagonalen viermal das selbe Element (nämlich das neutrale Element) hat; anders ausgedrückt, alle Elemente der Kleinschen Vierergruppe sind autoinvers.

Haben wir also Isomorphie zur Gruppe der vierten Einheitswurzeln?

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Wir schreiben die Elemente der vorgegebenen Verknüpfungstabelle in anderer Reihenfolge; offenbar ist 4 das neutrale Element.

Wenn Isomorphie vorliegt, dann sollte 4 an den selben Stellen auf der Diagonalen stehen, wie die 1 bei der Gruppe der Einheitswurzeln, d.h. die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} 1_{\text{Einheitswurzeln}} & \longleftrightarrow & 4 \\ -1_{\text{Einheitswurzeln}} & \longleftrightarrow & 2 \end{array}$$

sollte gelten. Damit erhalten wir einen Teil der umgeschriebenen Tabelle.

	4		2	
4	4		2	
2	2		4	

Beim weiteren Ausfüllen der Tabelle gibt es zwei Möglichkeiten.

- Erste Möglichkeit.

	4	1	2	3
4	4	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2

  Offensichtlich haben wir Isomorphie mit der Gruppe der vierten Einheitswurzeln und den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} 1\ _{\text{Einheitswurzeln}} & \longleftrightarrow & 4 \\ i\ _{\text{Einheitswurzeln}} & \longleftrightarrow & 1 \\ -1\ _{\text{Einheitswurzeln}} & \longleftrightarrow & 2 \\ -i\ _{\text{Einheitswurzeln}} & \longleftrightarrow & 3. \end{array}$$

- Zweite Möglichkeit.

	4	3	2	1
4	4	3	2	1
3	3	2	1	4
2	2	1	4	3
1	1	4	3	2

  Auch hier haben wir Isomorphie mit der Gruppe der vierten Einheitswurzeln; der Isomorphismus ist in diesem Fall

$$
\begin{aligned}
1_{\text{Einheitswurzeln}} &\longleftrightarrow 4\\
i_{\text{Einheitswurzeln}} &\longleftrightarrow 3\\
-1_{\text{Einheitswurzeln}} &\longleftrightarrow 2\\
-i_{\text{Einheitswurzeln}} &\longleftrightarrow 1.
\end{aligned}
$$

Die vorgegebene Tabelle stellt also eine Gruppe dar, die isomorph zur Gruppe der vierten Einheitswurzeln ist. Zusätzlich haben wir gesehen, daß es bei diesem Beispiel zwei verschiedene Isomorphismen gibt.

(c) Keine Gruppe.

Bei der Verknüpfung entstehen die Elemente 3 und -3 sowie 4, die nicht zu den Ausgangselementen gehören. Also liegt keine Abgeschlossenheit bezüglich der Verknüpfung vor.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$ mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine abelsche Gruppe bildet. Bestimmen Sie alle Untergruppen und skizzieren Sie das Ergebnis auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

Lösung: Wir haben

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\} = \{e^{i\,45^\circ k} \mid k = 0, 1, \ldots, 7\}$$

zu untersuchen.

(V) Verknüpfungsabgeschlossenheit.

$$e^{i\,45^\circ m} \cdot e^{i\,45^\circ n} = e^{i\,45^\circ (m+n)} = e^{i\,45^\circ ((m+n) \bmod 8)}$$

(A) Assoziativität.

Erste Begründung: Die Multiplikation komplexer Zahlen ist assoziativ.

Zweite Begründung:

$$e^{i\,45^\circ k} e^{i\,45^\circ m} e^{i\,45^\circ n} = e^{i\,45^\circ ((k+m+n) \bmod 8)}$$

unabhängig von der Klammerung.

(N) Neutrales Element.

Offensichtlich ist 1 das neutrale Element.

(I) Inverse Elemente.

Zu jedem Element existiert wegen

$$e^{i\,45^\circ k} e^{i\,45^\circ (8-k)} = 1$$

ein inverses Element.

(K) Kommutativität.

Erste Begründung: Die Multiplikation komplexer Zahlen ist kommutativ.

Zweite Begründung:

$$e^{i\,45^\circ m} e^{i\,45^\circ n} = e^{i\,45^\circ (m+n)} = e^{i\,45^\circ (n+m)} = e^{i\,45^\circ n} e^{i\,45^\circ m}\,.$$

Die Untergruppen sind $(\{1\}, \ \cdot\ )$, $(\{1, -1\}, \ \cdot\ )$ und $(\{1, i, -1, -i\}, \ \cdot\ )$ sowie die Gruppe selbst. Daß jeweils die Gruppeneigenschaften erfüllt sind, ist leicht zu sehen. Ebenso kann man schnell nachprüfen, daß es keine anderen Untergruppen gibt.

Man kann allgemein zeigen (in der Vorlesung wurde dies nicht hergeleitet), daß die Ordnung einer Untergruppe die Gruppenordnung teilen muß.

Aufgabe 5

Handelt es sich bei der algebraischen Struktur, die durch die folgende Verknüpfungstabelle definiert wird, um eine Gruppe?

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

Falls ja, muß sie isomorph zu $\mathbb{Z}_5$ sein, der einzigen Gruppe der Ordnung 5. Geben Sie in diesem Fall den Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie mit der Tabelle, welche Gruppeneigenschaft verletzt ist.

Lösung: Die gegebene Struktur kann *nicht* isomorph zur $\mathbb{Z}_5$ sein, da die Elemente der $\mathbb{Z}_5$ nicht sämtlich autoinvers sind. Außerdem ist die vorgegebene Struktur nicht abelsch, aber die $\mathbb{Z}_5$ ist abelsch.

Also: welche der Bedingungen (V), (A), (N), (I) ist verletzt?

Die Bedingungen (V), (N) und (I) sind erfüllt, wie man unmittelbar an der Tabelle erkennen kann. Es kann nur (A) verletzt sein. Da die Struktur keine Gruppe sein kann (sonst wäre es die $\mathbb{Z}_5$), ***muß*** (A) verletzt sein.

Wir suchen also in der Tabelle nach x, y und z so, daß

$$(x * y) * z \neq x * (y * z).$$

Wir finden zum Beispiel

$$\begin{aligned} (a * b) * d &= c * d = a, \\ a * (b * d) &= a * c = d. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es sei $\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$. Sowohl $(\mathbb{R}, +)$ als auch $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (Weisen Sie nach, daß alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe erfüllt sind.)

Zeigen Sie, daß die Gruppen isomorph sind. (Hinweis: Es muß ein Isomorphismus angegeben werden. Stellen Sie dazu eine der beiden Mengen auf der x–Achse und die andere auf der y–Achse eines Koordinatensystems dar, und überlegen Sie, welche Funktion die Forderungen erfüllt, die an einen Isomorphismus gestellt werden.)

Lösung:

- $(\mathbb{R}, +)$

  (V) klar; (A) klar; (N) die 0 ist das neutrale Element; (I) zu a ist $-a$ das inverse Element; (K) klar.

- $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$

  (V) klar; (A) klar; (N) die 1 ist das neutrale Element; (I) zu a ist $1/a$ das inverse Element; (K) klar.

Ein Isomorphismus zwischen den Gruppen $(G_1, *_1)$ und $(G_2, *_2)$ ist eine bijektive Abbildung

$$f : G_1 \longrightarrow G_2$$

mit

$$a *_1 b = c \iff f(a) *_2 f(b) = f(c). \tag{1}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Mengen auf den Achsen eines Koordinatensystems darzustellen, und nachzuweisen, daß die beiden Gruppen isomorph sind.

- Erste Möglichkeit.

  Wir stellen auf der waagrechten Achse eines Koordinatensystems die Menge $\mathbb{R}$ und auf der senkrechten Achse die Menge $\mathbb{R}^{>0}$ dar. Gesucht ist dann eine bijektive Abbildung der waagrechten auf die positive senkrechte Achse, wobei die Bedingung (1) erfüllt sein muß. Die Verknüpfung $*_1$ ist jetzt $+$, und die Verknüpfung $*_2$ ist $\cdot$. Aus (1) wird dann

$$a + b = c \iff f(a) \cdot f(b) = f(c).$$

Offenbar gilt

$$a + b = c \implies e^a \cdot e^b = e^{a+b} = e^c$$

und

$$\begin{aligned} e^a \cdot e^b = e^c &\implies \ln\left(e^a \cdot e^b\right) = \ln\left(e^c\right) \\ &\implies \ln\left(e^a\right) + \ln\left(e^b\right) = \ln\left(e^c\right) \\ &\implies a + b = c. \end{aligned}$$

Da $f(x) = e^x$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{>0}$ ist, sind alle Bedingungen erfüllt, und $f(x) = e^x$ ist ein Isomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.

- Zweite Möglichkeit.

  Umgekehrt wie beim ersten Fall wird auf der waagrechten Achse die Menge $\mathbb{R}^{>0}$ und auf der senkrechten Achse die Menge $\mathbb{R}$ dargestellt. Mit einer sehr ähnlichen Argumentation wie im ersten Fall zeigt man, daß $f(x) = \ln(x)$ ein Isomorphismus zwischen $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ ist.

Aufgabe 7

In der Vorlesung wurde die Verknüpfungstabelle der Diedergruppe D_3 aufgestellt. Die Gruppe D_3 hat die Ordnung 6 und ist nichtkommutativ.

	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_0	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_1	δ_2	δ_0	σ_2	σ_3	σ_1
δ_2	δ_2	δ_0	δ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	δ_0	δ_2	δ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	δ_1	δ_0	δ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	δ_2	δ_1	δ_0

Mit Hilfe der Verknüpfungstabelle sollen Berechnungen in der Gruppe D_3 durchgeführt werden.

(a) Berechnen Sie σ_1^4, δ_2^2, σ_1^3, $\sigma_1\,\delta_1\,\sigma_1$ und $(\sigma_3\,\delta_1\,\sigma_1)^2$.

(b) Lösen Sie die Gleichungen $\sigma_3\,x = \delta_1$ und $x\,\sigma_3 = \sigma_2$.

(c) Lösen Sie die Gleichung $\delta_2\,\sigma_3\,x\,\sigma_1\,\sigma_2 = \delta_0$ nach x auf.

Lösung:

(a) Es ergeben sich die folgenden Resultate.

$$\begin{aligned}
\sigma_1^4 &= \sigma_1^2\,\sigma_1^2 = \delta_0\,\delta_0 = \delta_0 \\
\delta_2^2 &= \delta_1 \\
\sigma_1^3 &= \sigma_1^2\,\sigma_1 = \delta_0\,\sigma_1 = \sigma_1 \\
\sigma_1\,\delta_1\,\sigma_1 &= \sigma_1\,\sigma_2 = \delta_2 \\
(\sigma_3\,\delta_1\,\sigma_1)^2 &= (\sigma_3\,\sigma_2)^2 = \delta_1^2 = \delta_2
\end{aligned}$$

(b) Mit der Tabelle folgt aus $\sigma_3\,x = \delta_1$ unmittelbar $x = \sigma_2$. Entsprechend liest man für $x\,\sigma_3 = \sigma_2$ in der Tabelle $x = \delta_2$ ab.

(c) Aus der Gleichung

$$\delta_2\,\sigma_3\,x\,\sigma_1\,\sigma_2 = \delta_0$$

folgt

$$\sigma_2\,x\,\delta_2 = \delta_0$$

und daraus ergibt sich

$$x = \sigma_2^{-1}\,\delta_0\,\delta_2^{-1} = \sigma_2\,\delta_0\,\delta_1 = \sigma_2\,\delta_1 = \sigma_1.$$

Aufgabe 8

Gegeben sind die sechs reellen Funktionen $f(x) =$

$$x, \quad 1-x, \quad 1/x, \quad (x-1)/x, \quad 1/(1-x) \quad \text{und} \quad x/(x-1).$$

Zeigen Sie, daß diese Funktionen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe bilden. Stellen Sie dazu eine Verknüpfungstabelle auf. Ist die Gruppe isomorph zu einer bereits bekannten Gruppe?

Lösung: Zunächst wird die Verknüpfungstabelle aufgeschrieben.

	x	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$
x	x	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$
$1-x$	$1-x$	x	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	x	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	x

Wird beispielsweise die Funktion $(x-1)/x$ mit der Funktion $x/(x-1)$ verknüpft, so entsteht die Funktion

$$\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}} - \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{x-1}{x} = 1 - 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\,.$$

Eine Gruppe liegt vor, wenn die Eigenschaften (V), (A), (N) und (I) erfüllt sind.

(V) Daß Verknüpfungsabgeschlossenheit vorliegt, sieht man unmittelbar an der Tabelle; bei den Verknüpfungen entstehen keine anderen als die Ausgangsfunktionen.

(A) Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist assoziativ (siehe Vorlesung).

(N) Es existiert ein neutrales Element, nämlich die Funktion $f(x) = x$.

(I) Zu jedem Element existiert ein eindeutiges inverses Element, da in der Tabelle in jeder Zeile genau einmal das neutrale Element steht.

Wir haben also eine Gruppe. Da sie nicht kommutativ ist, muß sie isomorph zur Gruppe D_3 sein. (Es gibt zwei Gruppen der Ordnung 6, die kommutative $\mathbb{Z}_6$ und die nichtkommutative D_3. Die D_3 ist isomorph zur S_3.)

Aufgabe 9

In einer Gruppe G gelte $x^2 = e$ für jedes $x \in G$, wobei e das neutrale Element sei. Zeigen Sie, daß G dann abelsch ist.

Lösung: Es seien x und y beliebige Elemente aus G. Dann ist

$$xy = yx$$

zu zeigen.

Aufgrund der Verknüpfungsabgeschlossenheit ist $xy \in G$. Da jedes Element aus G autoinvers ist, d.h. mit sich selbst verknüpft das neutrale Element ergibt, gilt auch für das Element xy aus G

$$(xy)^2 = xyxy = e.$$

Hierbei muß wegen der Assoziativität nicht geklammert werden. Multiplizieren wir die Gleichung von links mit x, folgt

$$x(xyxy) = xe.$$

Da e das neutrale Element ist, habe wir auf der rechten Seite $xe = x$. Aufgrund der Assoziativität ist die Klammerung egal, und wir können die linke Seite umschreiben, so daß wir insgesamt

$$(xx)yxy = x$$

erhalten. Da nun aber jedes Element von G autoinvers ist, wird xx zum neutralen Element e, und aus

$$e(yxy) = x$$

folgt sofort

$$yxy = x.$$

Jetzt multiplizieren wir von links mit y. Aus

$$y(yxy) = yx$$

folgt durch Ändern der Klammerung, was wegen der Assoziativität erlaubt ist,

$$(yy)xy = yx.$$

Da y autoinvers ist, gilt $yy = e$, und aus

$$e(xy) = yx$$

folgt unmittelbar

$$xy = yx,$$

was zu zeigen war.