

Aufgabe 1

Schreiben Sie die Verknüpfungstabellen der additiven Gruppen \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_6 und \mathbb{Z}_7 auf.

Aufgabe 2

Die Menge $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ bildet mit der Addition modulo n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe. Wie verhält es sich bei der Multiplikation modulo n ?

Schreiben Sie für $n = 3, 4$ und 5 die Verknüpfungstabellen von $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation modulo n auf. In welchen Fällen liegt eine Gruppe vor?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Verknüpfungstabellen stellt eine Gruppe dar?

(a)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	a	b
b	b	a	e	c
c	c	b	c	e

(b)

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

(c)

	0	1	-1	2	-2
0	0	1	-1	2	-2
1	1	2	0	3	-1
-1	-1	0	-2	1	-3
2	2	3	1	4	0
-2	-2	-1	-3	0	-4

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$ mit der üblichen Multiplikation in \mathbb{C} eine abelsche Gruppe bildet. Bestimmen Sie alle Untergruppen und skizzieren Sie das Ergebnis auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

Aufgabe 5

Handelt es sich bei der algebraischen Struktur, die durch die folgende Verknüpfungstabelle definiert wird, um eine Gruppe?

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

Falls ja, muß sie isomorph zu \mathbb{Z}_5 sein, der einzigen Gruppe der Ordnung 5. Geben Sie in diesem Fall den Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie mit der Tabelle, welche Gruppeneigenschaft verletzt ist.

Aufgabe 6

Es sei $\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Sowohl $(\mathbb{R}, +)$ als auch $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (Weisen Sie nach, daß alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe erfüllt sind.)

Zeigen Sie, daß die Gruppen isomorph sind. (Hinweis: Es muß ein Isomorphismus angegeben werden. Stellen Sie dazu eine der beiden Mengen auf der x -Achse und die andere auf der y -Achse eines Koordinatensystems dar, und überlegen Sie, welche Funktion die Forderungen erfüllt, die an einen Isomorphismus gestellt werden.)

Aufgabe 7

In der Vorlesung wurde die Verknüpfungstabelle der Diedergruppe D_3 aufgestellt. Die Gruppe D_3 hat die Ordnung 6 und ist nichtkommutativ.

	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_0	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_1	δ_2	δ_0	σ_2	σ_3	σ_1
δ_2	δ_2	δ_0	δ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	δ_0	δ_2	δ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	δ_1	δ_0	δ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	δ_2	δ_1	δ_0

Mit Hilfe der Verknüpfungstabelle sollen Berechnungen in der Gruppe D_3 durchgeführt werden.

- (a) Berechnen Sie σ_1^4 , δ_2^2 , σ_1^3 , $\sigma_1 \delta_1 \sigma_1$ und $(\sigma_3 \delta_1 \sigma_1)^2$.
- (b) Lösen Sie die Gleichungen $\sigma_3 x = \delta_1$ und $x \sigma_3 = \sigma_2$.
- (c) Lösen Sie die Gleichung $\delta_2 \sigma_3 x \sigma_1 \sigma_2 = \delta_0$ nach x auf.

Aufgabe 8

Gegeben sind die sechs reellen Funktionen $f(x) =$

$$x, \quad 1 - x, \quad 1/x, \quad (x - 1)/x, \quad 1/(1 - x) \quad \text{und} \quad x/(x - 1).$$

Zeigen Sie, daß diese Funktionen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe bilden. Stellen Sie dazu eine Verknüpfungstabelle auf. Ist die Gruppe isomorph zu einer bereits bekannten Gruppe?

Aufgabe 9

In einer Gruppe G gelte $x^2 = e$ für jedes $x \in G$, wobei e das neutrale Element sei. Zeigen Sie, daß G dann abelsch ist.