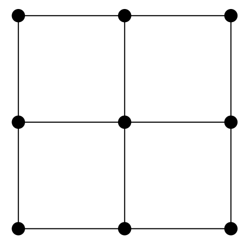
FH Gießen-Friedberg, FB 06 (MNI) — Lösungen zu Übungsblatt 6
Diskrete Strukturen — 8. Dezember 2008
Prof. Dr. H.-R. Metz

Aufgabe 1

Gibt es in dem folgenden Graphen eine Euler-Rundtour? Gibt es eine Hamilton-Rundtour?



Lösung: Es gilt:

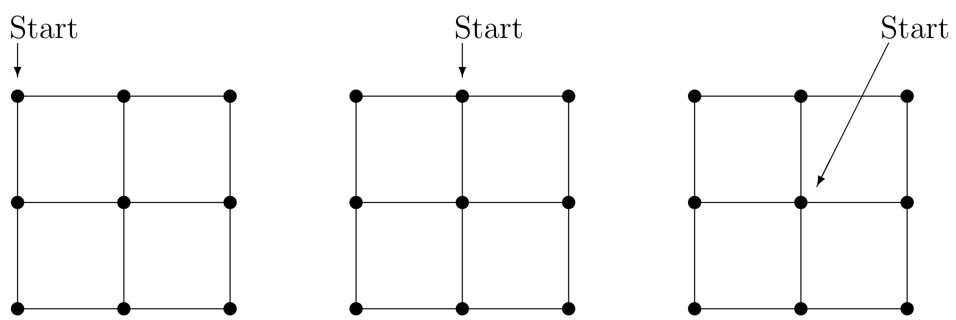
Eine Euler-Rundtour ist möglich. $\Longrightarrow$ Alle Ecken haben geraden Grad.

Daraus folgt mit Kontraposition:

Es existiert eine Ecke mit ungeradem Grad.
$\Longrightarrow$
Eine Euler-Rundtour ist nicht möglich.

Da der Graph Ecken mit ungeradem Grad enthält, ist *keine* Euler-Rundtour möglich.

Um zu untersuchen, ob eine Hamilton-Rundtour möglich ist, führen wir eine Fallunterscheidung durch; wir starten mit der Tour an drei verschiedenen Ecken. Aus Symmetriegründen haben wir damit alle neun möglichen Fälle für eine Startecke abgedeckt.



In allen Fällen zeigt sich: In dem Graphen ist *keine* Hamilton-Rundtour möglich.

In den beiden ersten Fällen läuft man entweder außen herum und verpaßt die Mitte, oder man geht zur Mitte und kommt dann nicht mehr durch einen der Eckpunkte.

Im dritten Fall kommt man nicht mehr zur Mitte zurück, wenn man alle äußeren Ecken durchläuft.

Aufgabe 2

Welche der Graphen C_n, K_n und W_n sind eulersche Graphen?

Lösung: Es gilt (siehe Vorlesung):

1. Existiert in einem Graphen eine Ecke mit ungeradem Grad, dann gibt es keine Euler-Rundtour.
2. Ist ein Graph zusammenhängend, und haben alle Ecken geraden Grad, dann existiert eine Euler-Rundtour.

Die Graphen C_n, K_n und W_n sind alle zusammenhängend.

- C_n $(n \geq 3)$:

  Alle Ecken haben den Grad 2. Damit sind alle C_n eulersch.
- K_n $(n \geq 3)$:

  Alle Ecken haben den Grad $n - 1$. Also sind die Graphen K_n eulersch für n ungerade und nicht eulersch für n gerade.
- W_n $(n \geq 3)$:

  Alle „äußeren“ Ecken eines Rades haben den Grad 3. Somit ist keiner der Graphen W_n eulersch.

Aufgabe 3

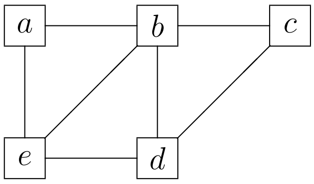
Gibt es in $G = (V, E)$ bei den folgenden Ecken- und Kantenmengen einen Hamiltonkreis? Falls ja, geben Sie einen an.

(a) $V = \{a, b, c, d, e\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

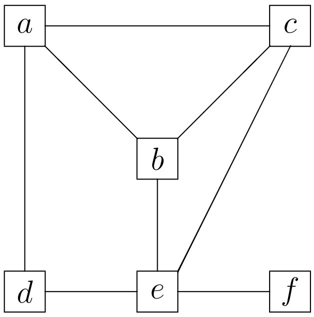
(b) $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$

Lösung:

(a) Eine Hamilton-Rundtour ist möglich, zum Beispiel durch a, b, c, d, e, a.



(b) Eine Hamilton-Rundtour ist nicht möglich.



- Fall 1: Startet man bei f, kommt man nicht mehr zu f zurück.
- Fall 2: Startet man nicht bei f, muß man irgendwann f besuchen und kommt nicht mehr weg.