Relationen 5

Äquivalenzrelationen

- Definition

  Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt ***Äquivalenzrelation***, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Anmerkung: Bei Äquivalenzrelationen verwendet man statt $a\ R\ b$ üblicherweise die Schreibweise $a \sim b$.

- Beispiele

- Definition

  Es sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M. Zu jedem $a \in M$ bezeichne $[a]$ die Menge aller Elemente von M, zu denen a in Relation steht, also

  $$[a] = \{x \in M \mid a \sim x\}.$$

  Die Menge $[a]$ heißt ***Äquivalenzklasse*** von a bezüglich R. Das Element a heißt ein Repräsentant von $[a]$.

- Beispiele

- Definition

  Es sei M eine Menge. Die Teilmengen $M_1, \ldots, M_k$ bilden eine ***Zerlegung*** (***Partition***) von M, wenn gilt:

  (a) $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (paarweise disjunkte Mengen),

  (b) $\bigcup_{i=1}^{k} M_i = M$ (Vereinigung ist gleich M).

- Skizze und Beispiele.

- Beispiel: Anklicken einer nichtausführbaren Datei ruft ein der Datei zugeordnetes Programm auf und öffnet mit diesem die Datei, oder aber es wird gemeldet, daß die Datei mit keinem Programm verknüpft ist. (Dann erscheint z.B. die Eingabeaufforderung „Öffnen mit ...“ und eine Liste von

Programmnamen.) Welches Programm aktiv wird hängt von der Dateiendung und der Einstellung des Betriebssystems ab.

Diese Situation liefert uns verschiedene Zerlegungen der Menge M aller nichtausführbaren Dateien.

(a) Zerlegung $M = M_1 \cup M_2$ mit
  - $M_1 = \{$Dateien, die nicht mit einem Programm verknüpft sind$\}$,
  - $M_2 = \{$Dateien, die mit einem Programm verknüpft sind$\}$.

(b) Zerlegung $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ mit
  - $M_1 = \{$Dateien, die nicht mit einem Programm verknüpft sind$\}$,
  - $M_2 = \{$Dateien: mit Editor PFE verknüpft$\}$,
  - $M_3 = \{$Dateien: mit DVI-Previewer Yap verknüpft$\}$,
  - $M_4 = \{$Dateien: mit Acrobat Reader verknüpft$\}$,
  - u.s.w.
  - $M_k = \{$Dateien: mit Excel verknüpft$\}$.

(c) Zerlegung $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ mit
  - $M_1 = \{$Dateien ohne Endung$\}$,
  - $M_2 = \{$Dateien mit der Endung .tex$\}$,
  - $M_3 = \{$Dateien mit der Endung .dvi$\}$,
  - $M_4 = \{$Dateien mit der Endung .pdf$\}$,
  - u.s.w.
  - $M_k = \{$Dateien mit der Endung .xls$\}$.

Die beiden letzten Zerlegungen werden auf den meisten Rechnern nicht identisch sein, da z.B. der Editor oft für Dateien mit verschiedenen Endungen verwendet wird (etwa .tex, .c, .cpp, .sty).

- Satz

  Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf der Menge M bilden eine Zerlegung von M. D.h. für alle a, $b \in M$ gilt entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$.

- Beweis

- Beispiele

- Satz

  Gegeben sei eine Menge M sowie eine Zerlegung von M durch die Teilmengen $M_1, \ldots, M_k$. Dann wird durch die Relation $\sim$ mit

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \text{ und } b \text{ liegen in derselben Teilmenge } M_i$$

  eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

- Beweis
- Beispiel: Menge der nichtausführbaren Dateien.

  Eine mögliche Äquivalenzrelation auf der Menge der nichtausführbaren Dateien lautet „… wird von demselben Programm geöffnet wie …“. Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden üblicherweise durch unterschiedliche Icons gekennzeichnet, die bei den Dateinamen stehen.

  Eine andere Äquivalenzrelation auf derselben Menge ist durch „… hat dieselbe Dateiendung wie …“ gegeben.
- Definition

  Es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Der positive Rest bei der Division a/m wird durch
  $$a \bmod m$$
  bezeichnet.
- Beispiele
- Hilfssatz

  Für a, $b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt
  $$a \bmod m = b \bmod m \qquad \Leftrightarrow \qquad m \mid (a-b).$$
- Beweis
- Definition

  Zu a, $b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ schreibt man
  $$a \equiv b \pmod{m}$$
  und sagt „a ist kongruent b modulo m“, falls $m \mid (a-b)$ gilt, d.h. falls a und b bei der Division durch m denselben Rest liefern.
- Anmerkung: Es gilt also
  $$a \equiv b \pmod{m} \qquad \Leftrightarrow \qquad m \mid (a-b) \qquad \Leftrightarrow \qquad a \bmod m = b \bmod m.$$
- Beispiele
- Satz

  Durch die Relation
  $$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \equiv b \pmod{m}$$
  wird eine Äquivalenzrelation definiert.
- Beweis
- Beispiel. Äquivalenzklassen betrachten.