Aufgabe 1

Bei den folgenden Artikelnummern soll jeweils eine Prüfziffer gemäß dem EAN-13-Code berechnet werden.

(a) 490252004409 (b) 401933750893

Liegen mit den beiden Ziffernfolgen

(c) 4002432301218 (d) 4901760517671

korrekte Artikelnummern entsprechend dem EAN-Standard vor?

Lösung: Bei dem EAN-13-Code hat man Zahlen aus 13 Ziffern,

$$a_1 a_2 \dots a_{13} \qquad \text{mit} \qquad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

wobei die Kontrollgleichung

$$\sum_{i \text{ ungerade}} a_i \quad + \quad 3 \cdot \sum_{i \text{ gerade}} a_i \quad \equiv \quad 0 \pmod{10}$$

erfüllt sein muß.

(a) Es ist

$$4+0+5+0+4+0+3 \cdot (9+2+2+0+4+9) = 13 + 3 \cdot 26 = 91,$$

so daß wegen

$$91 + 9 \equiv 0 \pmod{10}$$

die Prüfziffer gleich 9 sein muß.

(b) Da sich

$$4+1+3+7+0+9+3 \cdot (0+9+3+5+8+3) = 24 + 3 \cdot 28 = 108$$

ergibt, und weil

$$108 + 2 \equiv 0 \pmod{10}$$

ist, muß die Prüfziffer gleich 2 sein.

(c) Die Rechnung

$$4+0+4+2+0+2+8+3\cdot(0+2+3+3+1+1) = 20+3\cdot 10 = 50 \equiv 0 \pmod{10}$$

zeigt, daß die Kontrollgleichung für diese Ziffernfolge aufgeht, daß also eine korrekte Zahl entsprechend dem EAN-13-Code vorliegt.

(d) Bei dieser Zahl geht die Kontrollgleichung wegen

$$4+0+7+0+1+6+1+3\cdot(9+1+6+5+7+7) = 19+3\cdot 35 = 124$$

nicht auf, wir haben also keine korrekte Artikelnummer entsprechend dem EAN-13-Standard.

Aufgabe 2

Berechnen Sie zu den folgenden Zahlen Prüfziffern nach dem ISBN-Standard.

(a) 3-528-06419-? (b) 0-07-054235-?

Sind die folgenden ISBN-Nummern korrekt?

(c) 3-591-12227-8 (d) 3-89319-064-7

Lösung: Bei dem ISBN-Code hat man Zahlen aus zehn Ziffern,

$$a_1 a_2 \dots a_{10},$$

mit

$$a_i \in \{0,1,\dots,9\} \qquad \text{für } i = 1,\dots,9$$

und einem zusätzlichen Symbol (dem römischen Zahlzeichen für die Zehn) bei der letzten Ziffer,

$$a_{10} \in \{0,1,\dots,9,X\}.$$

Ferner muß die Kontrollgleichung

$$\sum_{i=1}^{9} i a_i \equiv a_{10} \pmod{11}$$

erfüllt sein.

(a) Da die gewichtete Summe der ersten neun Ziffern

$$\begin{array}{rcr|l}
3 & = & 3 & \\
2 \cdot 5 & = & 10 & \\
3 \cdot 2 & = & 6 & \\
4 \cdot 8 & = & 32 & \\
5 \cdot 0 & = & 0 & \\
6 \cdot 6 & = & 36 & \\
7 \cdot 4 & = & 28 & \\
8 \cdot 1 & = & 8 & \\
9 \cdot 9 & = & 81 & +
\end{array}$$

$$\overline{\quad 204 \quad}$$

ergibt, und weil

$$204 \equiv 6 \pmod{11}$$

ist, muß die Prüfziffer gleich 6 sein.

(b) Für die gewichtete Summe erhalten wir mit der Rechnung

$$\begin{array}{rcr|l}
0 & = & 0 & \\
2 \cdot 0 & = & 0 & \\
3 \cdot 7 & = & 21 & \\
4 \cdot 0 & = & 0 & \\
5 \cdot 5 & = & 25 & \\
6 \cdot 4 & = & 24 & \\
7 \cdot 2 & = & 14 & \\
8 \cdot 3 & = & 24 & \\
9 \cdot 5 & = & 45 & +
\end{array}$$

$$\overline{\quad 153 \quad}$$

den Wert 153, und wegen

$$153 \equiv 10 \pmod{11}$$

ist die Prüfziffer gleich X.

(c) Aufgrund der Rechnung

$$\begin{array}{rcr|l} 3 & = & 3 & \\ 2\cdot 5 & = & 10 & \\ 3\cdot 9 & = & 27 & \\ 4\cdot 1 & = & 4 & \\ 5\cdot 1 & = & 5 & \\ 6\cdot 2 & = & 12 & \\ 7\cdot 2 & = & 14 & \\ 8\cdot 2 & = & 16 & \\ 9\cdot 7 & = & 63 & + \\ \hline & & 154 & \end{array}$$

und der Beziehung

$$154 \equiv 0 \pmod{11}$$

erwarten wir als letzte Ziffer die 0. Da die vorgegebene Zahl aber mit 8 endet, geht die Kontrollgleichung nicht auf. Die angebliche ISBN-Nummer ist falsch.

(d) Die gewichtete Summation

$$\begin{array}{rcr|l} 3 & = & 3 & \\ 2\cdot 8 & = & 16 & \\ 3\cdot 9 & = & 27 & \\ 4\cdot 3 & = & 12 & \\ 5\cdot 1 & = & 5 & \\ 6\cdot 9 & = & 54 & \\ 7\cdot 0 & = & 0 & \\ 8\cdot 6 & = & 48 & \\ 9\cdot 4 & = & 36 & + \\ \hline & & 201 & \end{array}$$

liefert 201, und es gilt

$$201 \equiv 3 \pmod{11}$$

Da die letzte Ziffer der vorgegebenen Zahl gleich $7 \neq 3$ ist, geht die Kontrollgleichung nicht auf. Die Zahl ist keine ISBN-Nummer.

Die Kontrollgleichung

$$\sum_{i=1}^{9} i a_i \equiv a_{10} \pmod{11}$$

kann umgeformt werden, so daß sich gleichwertige Formulierungen ergeben. Die Gleichung

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + 9 \cdot a_9 \equiv a_{10} \pmod{11}$$

besagt, daß die linke und die rechte Seite bei der Division durch 11 den gleichen Rest übrig lassen. Die Differenz der beiden Seiten läßt also bei der Division durch 11 den Rest 0 übrig, ist also durch 11 teilbar, was auch in der Form

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + 9 \cdot a_9 - a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

aufgeschrieben werden kann. Addiert man nun zur linken Seite ein Vielfaches von 11, so ist die neue Summe immer noch durch 11 teilbar. Speziell kann man $11 \cdot a_{10}$ addieren, und wegen

$$-a_{10} + 11 \cdot a_{10} = 10 \cdot a_{10}$$

ergibt sich

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + 9 \cdot a_9 + 10 \cdot a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

als eine neue Form der Kontrollgleichung. Der Vorteil bei dieser Gestalt ist, daß alle zehn Ziffern auf der linken Seite stehen.

Wird die linke Seite der letzten Gleichung mit 10 multipliziert, ist sie natürlich immer noch durch 11 teilbar, so daß also auch

$$10 \cdot a_1 + 20 \cdot a_2 + 30 \cdot a_3 + \ldots + 90 \cdot a_9 + 100 \cdot a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

gilt. Auch wenn man von der linken Seite ein Vielfaches von 11 subtrahiert, bleibt die Teilbarkeit durch 11 erhalten. Von $20 \cdot a_2$ subtrahieren wir $11 \cdot a_2$. Von $30 \cdot a_3$ subtrahieren wir $22 \cdot a_3$ u.s.w. Schließlich ziehen wir $88 \cdot a_9$ von $90 \cdot a_9$ ab und subtrahieren zuletzt $99 \cdot a_{10}$ von $100 \cdot a_{10}$. Das liefert uns insgesamt

$$10 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + 8 \cdot a_3 + \ldots + 2 \cdot a_9 + 1 \cdot a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

als eine weitere gleichwertige Formulierung der ISBN-Kontrollgleichung.

Aufgabe 3

Ändern Sie den EAN-13-Code ab, indem Sie statt des Faktors 3 den Faktor 2 nehmen, d.h. multiplizieren Sie in der Kontrollgleichung die Ziffern an den geradzahligen Positionen nicht mit 3 sondern mit 2.

Welchen Effekt hat die Änderung für die Einzelfehlererkennung und für die Erkennung von Nachbartranspositionsfehlern?

Lösung: Wir haben eine Codezahl

$$a_1 a_2 \ldots a_{13} \qquad \text{mit} \qquad a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

aus 13 Ziffern, und es soll die Kontrollgleichung

$$a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \ldots + 2a_{12} + a_{13} \equiv 0 \pmod{10}$$

gelten. Welche Auswirkungen hat die Änderung des Gewichtungsfaktors?

- Erkennung von Nachbartranspositionsfehlern.

  Es seien x und y benachbarte Ziffern. Ein Nachbartranspositionsfehler (ein Zahlendreher) wird durch die Kontrollgleichung nicht erkannt, wenn

  $$x + 2y \equiv y + 2x \pmod{10}$$

  ist. Für welche Ziffern ist das möglich, d.h. für welche Ziffern x und y kann diese Gleichung gelten? Es folgt

  $$\begin{aligned} x + 2y \equiv y + 2x \pmod{10} &\iff x + 2y - (y + 2x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff y - x \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 10 \mid (y - x) \\ &\iff x = y, \end{aligned}$$

  da $-9 \leq y - x \leq 9$ gilt, weil $x, y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist. Nicht erkannt werden Zahlendreher also nur dann, wenn die benachbarten Ziffern übereinstimmen, dann ändert sich aber die Codezahl nicht. Anders formuliert: *alle* Nachbartranspositionsfehler werden erkannt. Das ist eine Verbesserung gegenüber dem EAN-13-Code.

- Erkennung von Einzelfehlern.

  1. Ungerade Positionen.

     An einer ungeraden Position wird die Ersetzung der Ziffer x durch die Ziffer y nicht erkannt, wenn

     $$x \equiv y \pmod{10}$$

     gilt. Wegen

     $$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{10} &\iff x - y \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 10 \mid (x - y) \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

     folgt, daß an den ungeraden Positionen alle Einzelfehler erkannt werden.

2. Gerade Positionen.

   Damit die Ersetzung der Ziffer x durch die Ziffer y an einer geraden Position der Codezahl nicht erkannt wird, muß

   $$2x \equiv 2y \pmod{10}$$

   gelten. Wegen

   $$\begin{aligned} 2x \equiv 2y \pmod{10} &\iff 2x - 2y \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 2(x-y) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 10 \mid 2(x-y) \end{aligned}$$

   ist dies möglich für $x - y = 5$ oder $x - y = -5$. Dies ist bei den Paaren

x	9	8	7	6	5	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	5	6	7	8	9

   der Fall. Also werden nicht alle Einzelfehler erkannt. Dies ist eine erhebliche Verschlechterung gegenüber dem EAN-13-Code.

Die Modifikation der Kontrollgleichung des EAN-13-Codes führt auf einen Code, der zwar alle Zahlendreher erkennt, aber nicht mehr alle Einzelfehler. Hält man die Erkennung von Einzelfehlern für wichtiger, wird man den EAN-13-Code vorziehen.

Aufgabe 4

In der Kontrollgleichung für den EAN-13-Code werden die Ziffern an den geradzahligen Positionen mit 3 multipliziert. Wie man leicht zeigen kann, werden aber auch mit dem Faktor 7 oder mit dem Faktor 9 alle Einzelfehler erkannt. Stellen Sie fest, welche Nachbartranspositionsfehler man in den drei Fällen nicht erkennen kann.

Lösung:

- Faktor 3

  Es seien x und y benachbarte Ziffern. Ein Transpositionsfehler wird nicht erkannt, wenn

  $$x + 3y \equiv y + 3x \pmod{10}$$

  ist. Diese Bedingung kann äquivalent umgeformt werden:

  $$\begin{aligned} x + 3y \equiv y + 3x \pmod{10} &\iff x + 3y - (y + 3x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 2(y-x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 10 \mid 2(y-x). \end{aligned}$$

  Weil $y - x$ nur Werte zwischen -9 und 9 annehmen kann, wird der Fehler nur dann nicht erkannt, wenn $y - x = 5$ oder $y - x = -5$ ist.

- Faktor 7

  Analog zum ersten Fall wird der Fehler nicht erkannt, falls

$$\begin{aligned} x + 7y \equiv y + 7x \pmod{10} &\iff x + 7y - (y + 7x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 6(y - x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 10 \mid 6(y - x) \end{aligned}$$

  gilt, und das ist nur für $y - x = 5$ oder $y - x = -5$ der Fall.

- Faktor 9

  Ein Zahlendreher wird für

$$\begin{aligned} x + 9y \equiv y + 9x \pmod{10} &\iff x + 9y - (y + 9x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 8(y - x) \equiv 0 \pmod{10} \\ &\iff 10 \mid 8(y - x) \end{aligned}$$

  nicht erkannt. Wegen $-9 \leq y - x \leq 9$ ist dies auch hier nur für $y - x = 5$ oder $y - x = -5$ möglich.

Die drei Verfahren sind gleich mächtig. In allen Fällen werden genau die selben Transpositionsfehler nicht erkannt. Will man einen möglichst kleinen Faktor haben, kommt man auf den EAN-13-Code.