Aufgabe 1

Schreiben Sie die Verknüpfungstabellen der additiven Gruppen $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7$ auf.

Aufgabe 2

Die Menge $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ bildet mit der Addition modulo n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe. Wie verhält es sich bei der Multiplikation modulo n?

Schreiben Sie für $n = 3$, 4 und 5 die Verknüpfungstabellen von $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation modulo n auf. In welchen Fällen liegt eine Gruppe vor?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Verknüpfungstabellen stellt eine Gruppe dar?

(a)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	a	b
b	b	a	e	c
c	c	b	c	e

(b)

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

(c)

	0	1	-1	2	-2
0	0	1	-1	2	-2
1	1	2	0	3	-1
-1	-1	0	-2	1	-3
2	2	3	1	4	0
-2	-2	-1	-3	0	-4

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$ mit der üblichen Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine abelsche Gruppe bildet. Bestimmen Sie alle Untergruppen und skizzieren Sie das Ergebnis auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

Aufgabe 5

Handelt es sich bei der algebraischen Struktur, die durch die folgende Verknüpfungstabelle definiert wird, um eine Gruppe?

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

Falls ja, muß sie isomorph zu $\mathbb{Z}_5$ sein, der einzigen Gruppe der Ordnung 5. Geben Sie in diesem Fall den Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie mit der Tabelle, welche Gruppeneigenschaft verletzt ist.

Aufgabe 6

Es sei $\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Sowohl $(\mathbb{R}, +)$ als auch $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (Weisen Sie nach, daß alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe erfüllt sind.)

Zeigen Sie, daß die Gruppen isomorph sind. (Hinweis: Es muß ein Isomorphismus angegeben werden. Stellen Sie dazu eine der beiden Mengen auf der x–Achse und die andere auf der y–Achse eines Koordinatensystems dar, und überlegen Sie, welche Funktion die Forderungen erfüllt, die an einen Isomorphismus gestellt werden.)

Aufgabe 7

In der Vorlesung wurde die Verknüpfungstabelle der Diedergruppe D_3 aufgestellt. Die Gruppe D_3 hat die Ordnung 6 und ist nichtkommutativ.

	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_0	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_1	δ_2	δ_0	σ_2	σ_3	σ_1
δ_2	δ_2	δ_0	δ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	δ_0	δ_2	δ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	δ_1	δ_0	δ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	δ_2	δ_1	δ_0

Mit Hilfe der Verknüpfungstabelle sollen Berechnungen in der Gruppe D_3 durchgeführt werden.

(a) Berechnen Sie σ_1^4, δ_2^2, σ_1^3, $\sigma_1\,\delta_1\,\sigma_1$ und $(\sigma_3\,\delta_1\,\sigma_1)^2$.

(b) Lösen Sie die Gleichungen $\sigma_3\,x = \delta_1$ und $x\,\sigma_3 = \sigma_2$.

(c) Lösen Sie die Gleichung $\delta_2\,\sigma_3\,x\,\sigma_1\,\sigma_2 = \delta_0$ nach x auf.

Aufgabe 8

Gegeben sind die sechs reellen Funktionen $f(x) =$

$$x, \quad 1-x, \quad 1/x, \quad (x-1)/x, \quad 1/(1-x) \quad \text{und} \quad x/(x-1).$$

Zeigen Sie, daß diese Funktionen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe bilden. Stellen Sie dazu eine Verknüpfungstabelle auf. Ist die Gruppe isomorph zu einer bereits bekannten Gruppe?

Aufgabe 9

In einer Gruppe G gelte $x^2 = e$ für jedes $x \in G$, wobei e das neutrale Element sei. Zeigen Sie, daß G dann abelsch ist.