Aufgabe 1

Es bezeichne R die Relation $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$ und S die Relation $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$. Geben Sie $S \circ R$ an. Skizzieren Sie die Verknüpfung mit Hilfe gerichteter Graphen. Berechnen Sie die Boolsche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Boolschen Matrizen von S und R.

Lösung: Schreibweise: Zu $R_1 \subset A \times B$ und $R_2 \subset B \times C$ ist

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,c) | (\exists b)\, ((a,b) \in R_1) \wedge ((b,c) \in R_2)\}.$$

(Zur Reihenfolge siehe die Anmerkung im MIT-Skript: „The symbol $\circ$ is a source of eternal confusion in mathematics ...“.)

Die Relationen R und S sind vorgegeben als

$$\begin{aligned} R &= \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}, \\ S &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}. \end{aligned}$$

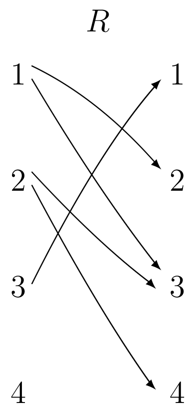
Entsprechend der Definition für die Verknüpfung von Relationen können wir nun feststellen, welche Paare in $S \circ R$ liegen.

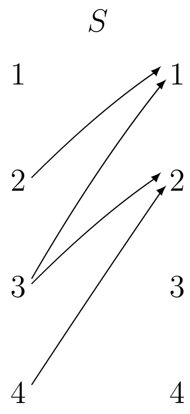
$$\begin{array}{lcl} (1,2) \in R \ \wedge \ (2,1) \in S & \Rightarrow & (1,1) \in S \circ R \\ (1,3) \in R \ \wedge \ (3,1) \in S & \Rightarrow & (1,1) \in S \circ R \\ (1,3) \in R \ \wedge \ (3,2) \in S & \Rightarrow & (1,2) \in S \circ R \\ (2,3) \in R \ \wedge \ (3,1) \in S & \Rightarrow & (2,1) \in S \circ R \\ (2,3) \in R \ \wedge \ (3,2) \in S & \Rightarrow & (2,2) \in S \circ R \\ (2,4) \in R \ \wedge \ (4,2) \in S & \Rightarrow & (2,2) \in S \circ R \end{array}$$

Zwar ist $(3,1) \in R$, aber in S ist kein Paar mit der 1 an der ersten Position, d.h. über $(3,1) \in R$ wird kein Beitrag zu $S \circ R$ geliefert. Insgesamt habe wir damit

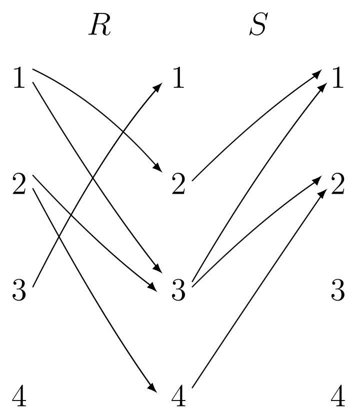
$$S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

Die Verknüpfung von R und S läßt sich anschaulich sehr schön darstellen, wenn man R und S nicht wie üblich zeichnet, sondern die Ecken zweimal nebeneinander auflistet.

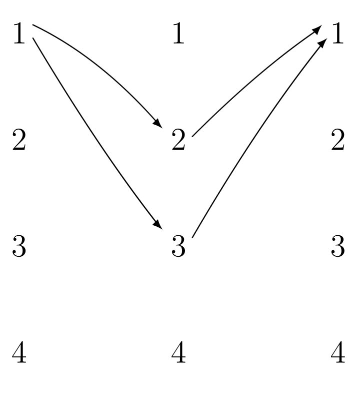




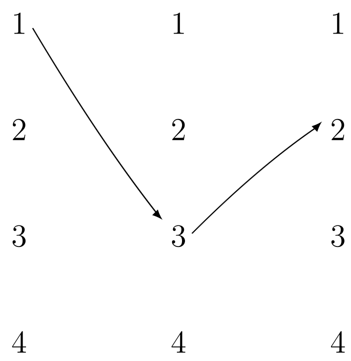
Werden jetzt die Endpunkte von R und die Anfangspunkte von S zusammengelegt, so besteht $S \circ R$ aus allen Paaren, für die es mindestens einen Weg von links nach rechts über ein „verbindendes“ Element in der Mitte gibt.



Zum Beispiel sieht man auf zwei Arten, daß $(1, 1)$ in $S \circ R$ liegt:



Ferner gehört zum Beispiel das Paar $(1,2)$ wegen des folgenden Weges zu $S \circ R$:



Um die Boolsche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Boolschen Matrizen von R und S berechnen zu können, schreiben wir diese Matrizen zunächst auf.

R	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

S	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

Die Boolsche Matrix der Relation $S \circ R$ wird mit einer abgeänderten Matrizenmultiplikation berechnet, bei der „$\vee$“ (das logische Oder) anstelle von „$+$“ verwendet wird, und „$\wedge$“ (das logische Und) anstelle von „ $\cdot$ “.

Wir schreiben die Multiplikation in einem Rechenschema auf:

	S
R	$S \circ R$

				0	0	0	0
				1	0	0	0
				1	1	0	0
				0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Zum Beispiel entsteht das Element in der zweiten Zeile und der ersten Spalte durch

$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

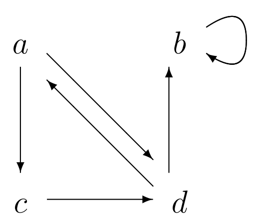
Im folgenden Schema werden diejenigen Elemente der Boolschen Matrizen dargestellt, die an dieser Berechnung beteiligt sind.

				0
				1
				1
				0
0	0	1	1	1

Aufgabe 2
Es sei die Relation $R = \{(a,c),(a,d),(b,b),(c,d),(d,a),(d,b)\}$ auf der Menge $M = \{a,b,c,d\}$ gegeben. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen von R, und bestimmen Sie mit dessen Hilfe die Relationen R^2 und R^3.

Lösung: Es gibt zwei Möglichkeiten, die Relation graphisch zu veranschaulichen.

- 1. Darstellung



Der gerichtete Graph mit den Ecken a, b, c und d und den gerichteten Kanten entsprechend der Relation wird gezeichnet. Man erhält R^2 und R^3 durch

$$\begin{aligned} R^2 &= \{(x,y) \,|\, \text{es existiert ein Weg der Länge 2 von } x \text{ nach } y\}, \\ R^3 &: \text{ analog mit Länge 3.} \end{aligned}$$

Konkret kann man zum Beispiel systematisch durchprobieren, ob (a,a) in R^2 ist, (a,b) in R^2 ist, (a,c) in R^2 ist, u.s.w., wobei Tabellen praktisch sind.

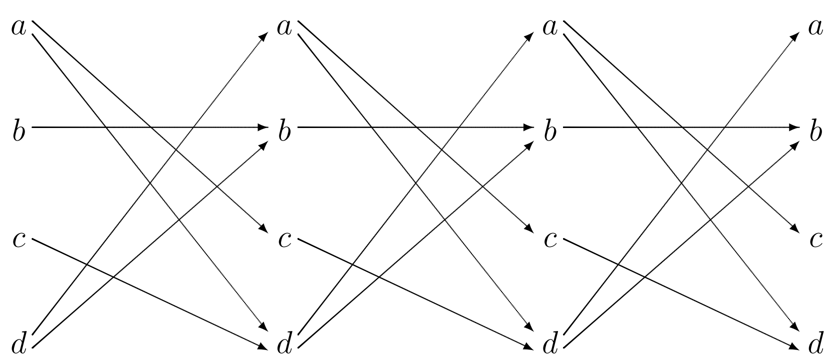
	in R^2	in R^3
(a,a)	ja	ja
(a,b)	ja	ja
(a,c)	nein	ja
(a,d)	ja	ja

	in R^2	in R^3
(b,a)	nein	nein
(b,b)	ja	ja
(b,c)	nein	nein
(b,d)	nein	nein

	in R^2	in R^3
(c,a)	ja	nein
(c,b)	ja	ja
(c,c)	nein	ja
(c,d)	nein	ja

	in R^2	in R^3
(d,a)	nein	ja
(d,b)	ja	ja
(d,c)	ja	nein
(d,d)	ja	ja

- 2. Darstellung

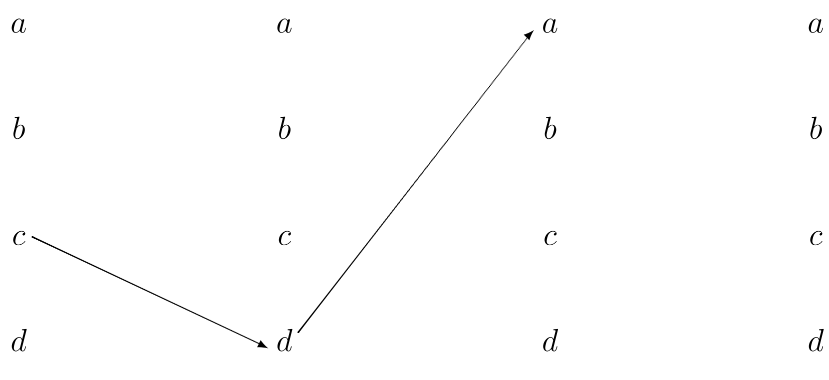


Die Spalte mit den Ecken a, b, c und d wird viermal nebeneinander geschrieben. Von einer Spalte zur nächsten werden gerichtete Kanten entsprechend der Relation gezeichnet. Hier bekommt man R^2 und R^3 durch

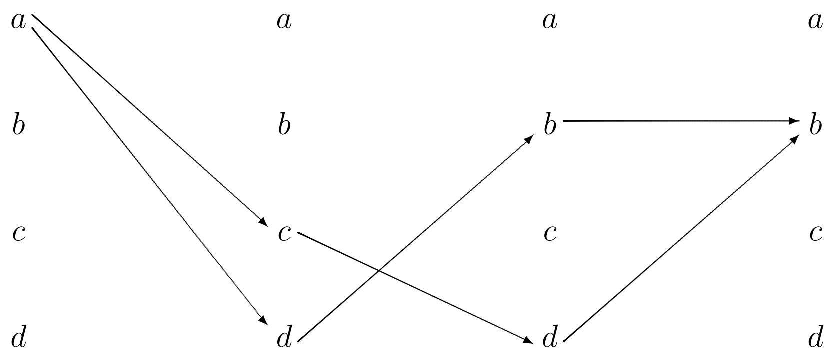
R^2 : besteht aus allen Paaren (x, y), für die ein Weg der Länge 2 von dem Element x in der linken Spalte zu dem Element y zwei Spalten weiter existiert;

R^3 : besteht aus allen Paaren (x, y), für die ein Weg der Länge 3 von x in der linken Spalte zu y in der rechten Spalte existiert.

Diese Darstellung ist zwar aufwendiger als die erste, aber die Wege sind leicht zu erkennen. Im folgenden ist zum Beispiel ein Weg der Länge 2 von c nach a herausgestellt, der zeigt, daß $(c, a) \in R^2$ gilt.



Im folgenden sehen wir, daß es zwei Wege der Länge 3 von a nach b gibt. Also gilt $(a, b) \in R^3$. (Selbstverständlich hätte schon ein Weg genügt.)



Insgesamt kann man also unmittelbar ablesen, daß sich

$$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(c,a),(c,b),(d,b),(d,c),(d,d)\}$$

und

$$R^3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,d)\}$$

für die gesuchten Relationen ergibt.

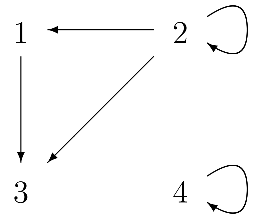
Aufgabe 3

Es sei R die Relation $\{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(4,4)\}$ auf der Menge $\{1,2,3,4\}$. Geben Sie R^{-1} an. Schreiben Sie zu R und R^{-1} die Boolschen Matrizen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

Lösung:

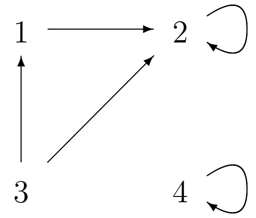
- $R = \{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(4,4)\}$

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	1



- $R^{-1} = \{(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,4)\} = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,2),(4,4)\}$

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	0	1



Matrix: Spiegelung an der Hauptdiagonalen.
Graph: Richtungen der Pfeile umdrehen.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie zu den folgenden Relationen auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ die reflexive, die symmetrische und die transitive Hülle. Zeichnen Sie zu jeder Relation den gerichteten Graphen.

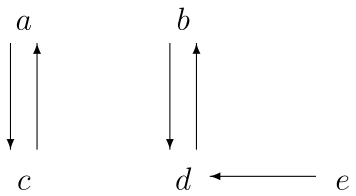
(a) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$

(b) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$

(c) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$

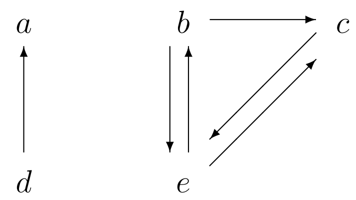
Lösung:

(a) $R = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$



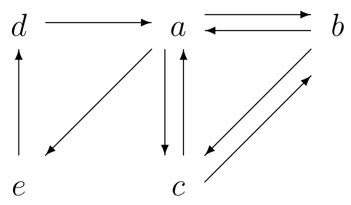
- reflexive Hülle: $R \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle: $R \cup \{(d, e)\}$
- transitive Hülle: $R \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, b)\}$

(b) $R = \{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$



- reflexive Hülle: $R \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle: $R \cup \{(a, d), (c, b)\}$
- transitive Hülle: $R \cup \{(b, b), (c, b), (c, c), (e, e)\}$

(c) $R = \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$



- reflexive Hülle: $R \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
- symmetrische Hülle: $R \cup \{(a,d),(d,e),(e,a)\}$
- transitive Hülle: $\{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}$, d.h. die transitive Hülle besteht aus allen Paaren, die überhaupt möglich sind.

Zur Bestimmung der transitiven Hülle ist ein Satz aus der Vorlesung hilfreich: Das Paar (x,y) liegt in der transitiven Hülle von R, wenn es in R einen Weg von x nach y gibt.

Aufgabe 5
Stellen Sie fest, ob die folgenden Relationen auf der Menge der ganzen Zahlen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv sind, wobei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

(a) $x \neq y$,

(b) $xy \geq 1$,

(c) $x = y + 1$ oder $x = y - 1$,

(d) $x \equiv y \bmod 7$,

(e) x ist ein Vielfaches von y,

(f) x und y sind beide negativ oder beide nichtnegativ,

(g) $x = y^2$,

(h) $x \geq y^2$.

Lösung: Von den Relationen sind

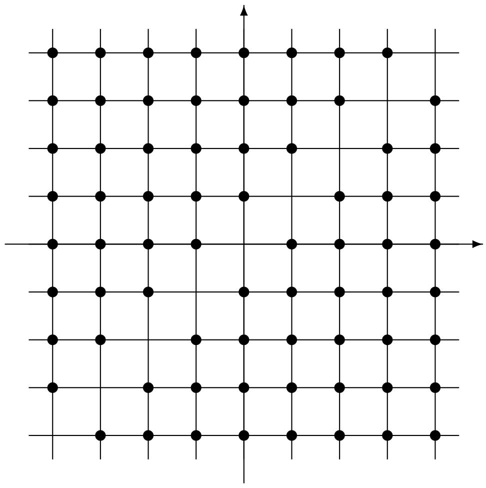
- reflexiv: (d), (e), (f),
- symmetrisch: (a), (b), (c), (d), (f),
- antisymmetrisch: (g), (h),
- asymmetrisch: keine,
- transitiv: (b), (d), (e), (f), (h).

Eine Relation auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und kann ausschnittsweise dargestellt werden, indem in der Ebene von den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten diejenigen markiert werden, die zur Relation gehören. Wir werden einen Ausschnitt betrachten, der den Ursprung des Koordinatensystems enthält. Bei unseren Beispielen wird durch diese Veranschaulichung klar werden, ob Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie oder Asymmetrie vorliegt. Lediglich die Transitivität ist nicht erkennbar.

Wenn im folgenden von *der Diagonalen* die Rede ist, so meinen wir die Diagonale im ersten und dritten Quadranten.

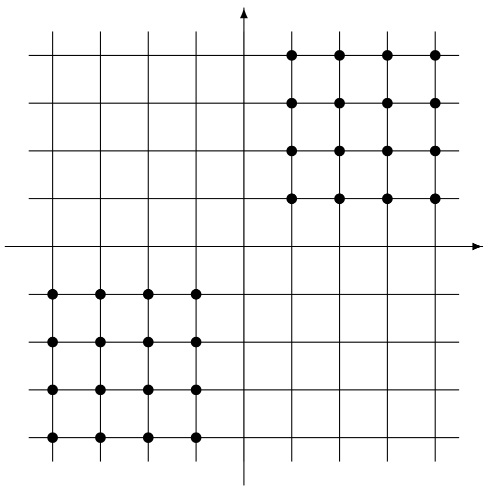
(a) $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \neq y$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(1,1) \notin R$, da nicht $1 \neq 1$ gilt. Die Punkte auf der Diagonalen gehören nicht zur Relation.
- symmetrisch: ist $x \neq y$, dann ist auch $y \neq x$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht transitiv: es gilt $3\,R\,7$ und $7\,R\,3$, aber aus $3 \neq 7$ und $7 \neq 3$ folgt nicht $3 \neq 3$.



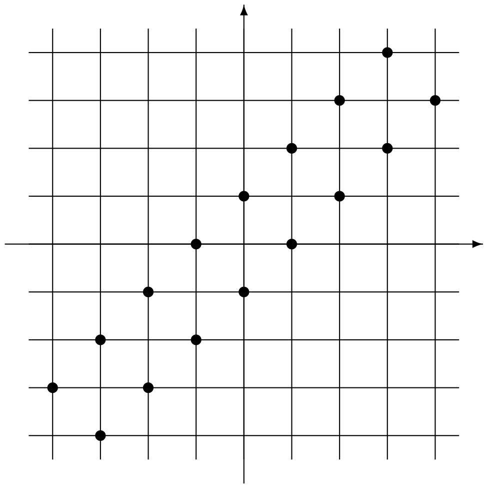
(b) $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; xy \geq 1$

- nicht reflexiv: denn es gilt $(0,0) \notin R$, da $0 \cdot 0 = 0 < 1$ ist. Die Diagonale gehört nicht vollständig zur Relation, der Ursprung fehlt.
- symmetrisch: ist $x \cdot y \geq 1$, dann ist auch $y \cdot x \geq 1$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt $1\,R\,1$. Es gibt Punkte auf der Diagonalen, die zur Relation gehören.
- transitiv: aus $xy \geq 1$ folgt $x,y \geq 1$ oder $x,y \leq -1$. Somit folgt aus $xy \geq 1$ und $yz \geq 1$, daß $x,y,z \geq 1$ oder $x,y,z \leq -1$ gilt, also folgt $xz \geq 1$.



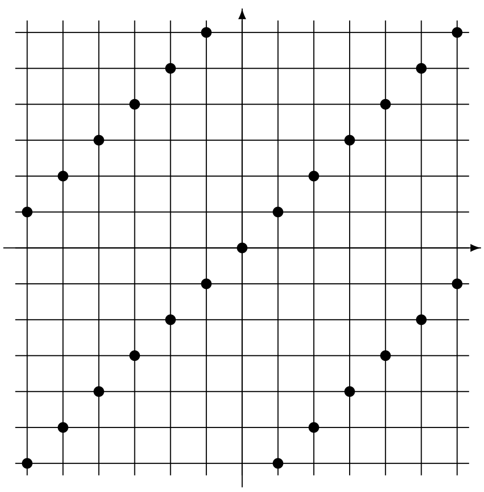
(c) $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y+1$ oder $x = y-1$

- nicht reflexiv: wenn x und y übereinstimmen, kann keine der beiden Gleichungen gelten. Die Punkte auf der Diagonalen gehören nicht zur Relation.
- symmetrisch: $x = y+1$ und $x = y-1$ gehen durch Vertauschung von x und y ineinander über. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $2\,R\,1$ als auch $1\,R\,2$, aber es ist $1 \neq 2$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt sowohl $2\,R\,1$ als auch $1\,R\,2$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht transitiv: es gilt $1\,R\,2$ und $2\,R\,1$, aber nicht $1\,R\,1$.



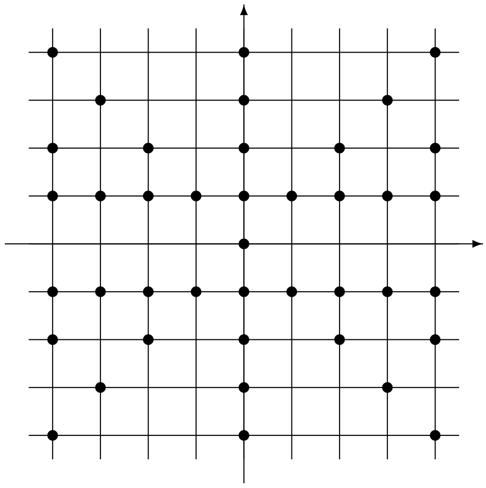
(d) $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \equiv y \bmod 7$

- reflexiv: $(x,x) \in R$, denn 7 teilt $x - x = 0$. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- symmetrisch: wenn 7 die Differenz $x-y$ teilt, dann teilt 7 auch $y-x$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $1\,R\,(-6)$ als auch $(-6)\,R\,1$, aber es ist $1 \neq -6$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Bsp. gilt $1\,R\,1$. Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: $7 \mid (x-y) \Rightarrow n \cdot 7 = x - y$ und $7 \mid (y-z) \Rightarrow m \cdot 7 = y - z$. Addition liefert $(n+m)7 = x - z$, d.h. 7 teilt $x - z$.



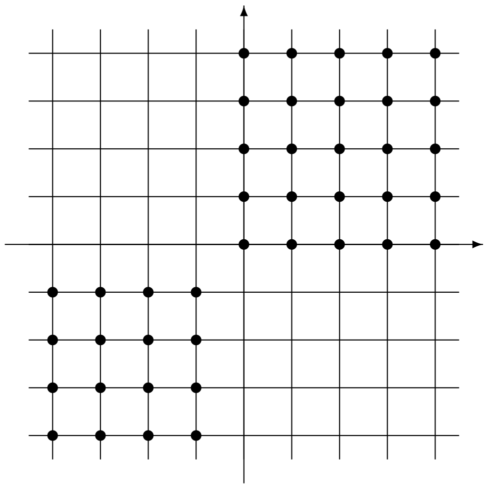
(e) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x$ ist ein Vielfaches von y

- reflexiv: denn x ist ein Vielfaches von x, da $x = 1 \cdot x$. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $x = 3$ ist ein Vielfaches von $y = 1$, aber $x = 1$ ist nicht ein Vielfaches von $y = 3$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $1\,R\,(-1)$ als auch $(-1)\,R\,1$, aber es ist $1 \neq (-1)$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt $1\,R\,1$. Es gibt Punkte auf der Diagonalen, die zur Relation gehören.
- transitiv: $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ bedeutet, daß y ein Vielfaches von z und x ein Vielfaches von y ist. Dann ist auch x ein Vielfaches von z, d.h. $x\,R\,z$.



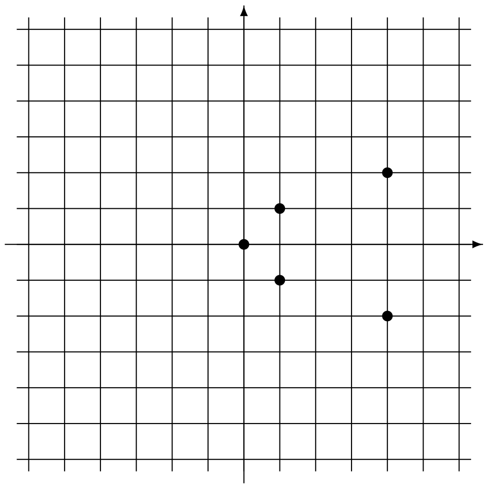
(f) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x$ und y sind beide negativ oder beide nichtnegativ

- reflexiv: $(x, x) \in R$, da x entweder negativ oder nichtnegativ ist. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- symmetrisch: ist unmittelbar klar. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Bsp. gilt $1\,R\,1$. Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ folgt entweder $x, y, z < 0$ oder $x, y, z \geq 0$. In beiden Fällen gilt $x\,R\,z$.



(g) $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y^2$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(2,2) \notin R$, da $2 \neq 2^2$ ist. Nicht alle Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $4 = 2^2$, aber $2 \neq 4^2$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- antisymmetrisch: aus $x = y^2$ und $y = x^2$ folgt $x = x^4$, wegen $x = y^2 \geq 0$ also nur $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Es gibt keine Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: $0\,R\,0$ und $1\,R\,1$. Zwei Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht transitiv: es gilt $16\,R\,4$ und $4\,R\,2$, aber nicht $16\,R\,2$.



(h) $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \geq y^2$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(2,2) \notin R$, da $2 < 2^2$ ist. Nicht alle Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $4 \geq 2^2$, aber $2 < 4^2$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- antisymmetrisch: aus $x \geq y^2$ und $y \geq x^2$ folgt $x, y \geq 0$ und $x \geq x^4$, also $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Es gibt keine Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: $0\,R\,0$ und $1\,R\,1$. Zwei Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: aus $x \geq y^2$ und $y \geq z^2$ folgt $x \geq z^4$, also gilt erst recht $x \geq z^2$. D.h. $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ impliziert $x\,R\,z$.