Aufgabe 1

Welche der folgenden Relationen R auf der Menge der Menschen ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Es sei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

(a) x ist größer als y,

(b) x und y wurden am selben Tag geboren,

(c) x hat denselben Vornamen wie y,

(d) x und y haben eine gemeinsame Großmutter.

Lösung: Von den Relationen sind

- reflexiv: (b), (c), (d),
- symmetrisch: (b), (c), (d),
- antisymmetrisch: (a),
- asymmetrisch: (a),
- transitiv: (a), (b), unklar bei (c).

Ob die Relation (c) transitiv ist, kann nicht klar gesagt werden, da es bei mehreren Vornamen einen Spielraum bei der Interpretation gibt. Sollen alle einzelnen Vornamen zusammen als ein „Gesamtvorname“ interpretiert werden?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Schreiben Sie die Boolschen Matrizen der Relationen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

(a) $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

(b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(c) $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$

(d) $R_4 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

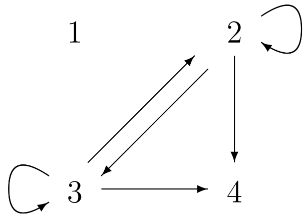
(e) $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

(f) $R_6 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

Lösung:

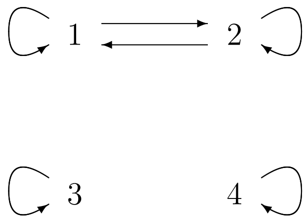
(a) Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv.

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	0	0



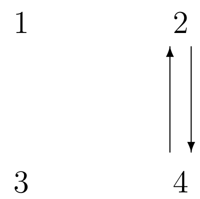
(b) Die Relation ist: reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv.

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



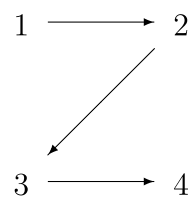
(c) Die Relation ist: nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht transitiv (Schlingen bei 2 und 4 fehlen).

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0



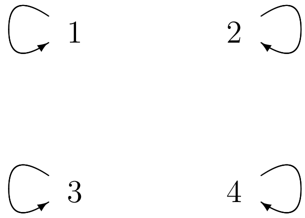
(d) Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, nicht transitiv.

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0



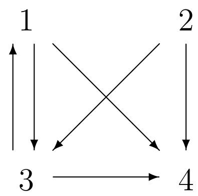
(e) Die Relation ist: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv. Wie uns dieses Beispiel zeigt, schließen sich Symmetrie und Antisymmetrie nicht gegenseitig aus!

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



(f) Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht transitiv ($2\,R\,3$ und $3\,R\,1$, aber nicht $2\,R\,1$).

	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	0



Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde hergeleitet, daß es auf einer endlichen Menge mit n Elementen genau 2^{n^2} voneinander verschiedene Relationen gibt.

(a) Ändern Sie die den Beweis ab, und finden Sie heraus, wieviele reflexive und wieviele symmetrische Relationen auf einer Menge mit n Elementen existieren.

(b) Wieviel Prozent aller Relationen auf einer Menge mit n Elementen sind reflexiv? Wie groß ist der Prozentsatz für $n = 1$, 2, 3 und 4? Wie groß ist er ungefähr, wenn $n = 100$ ist?

Lösung:

(a) Bei einer reflexiven Relation sind alle Elemente auf der Hauptdiagonalen der zugehörigen Boolschen Matrix gleich 1. Für die restlichen $n^2 - n$ Elemente gibt es keine Beschränkungen, jedes kann 0 oder 1 sein. Also gibt es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n^2 - n \text{ Faktoren}} = 2^{n^2-n}$$

verschiedene Möglichkeiten für die Boolsche Matrix, d.h. es gibt

$$2^{n^2-n}$$

reflexive Relationen.

Bei einer symmetrischen Relation sind alle Elemente der Hauptdiagonalen und alle Elemente oberhalb (oder unterhalb) frei wählbar; die Symmetrie legt dann zwingend die Werte unterhalb (bzw. oberhalb) fest. Die Anzahl der frei wählbaren Elemente ist

$$n + (n^2 - n)/2 = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n + n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} n &: \text{ die Anzahl der Hauptdiagonalelemente,} \\ n^2 - n &: \text{ die Anzahl aller Matrixelemente mit Ausnahme der} \\ &\ \text{ Hauptdiagonalelemente,} \\ (n^2 - n)/2 &: \text{ die Anzahl aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen.} \end{aligned}$$

Man beachte, daß $n(n+1)/2$ immer eine ganze Zahl ist, entweder n oder $n+1$ ist gerade.

Also gibt es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n(n+1)/2 \text{ Faktoren}} = 2^{n(n+1)/2}$$

symmetrische Relationen.

(b) Bei einer Menge mit n Elementen verhält sich die Anzahl reflexiver Relationen zur Anzahl aller Relationen wie

$$\frac{2^{n^2-n}}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2} \cdot 2^{-n}}{2^{n^2}} = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \,.$$

Also sind

$$\frac{1}{2^n} \cdot 100\%$$

aller Relationen reflexiv.

Für die speziellen Werte von n ergibt sich

$$\begin{aligned} n = 1 &: \ 50\% \\ n = 2 &: \ 25\% \\ n = 3 &: \ 12,5\% \\ n = 4 &: \ 6,25\% \\ n = 100 &: \ \frac{1}{2^{100}} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{10} \approx \left(10^{-3}\right)^{10} = 10^{-30} = 10^{-28}\,\%. \end{aligned}$$