Algebra 2

Gruppen — Elementare Begriffe, Eigenschaften und Beispiele

- Definition

  Zu $(G, *)$ heißt $(U, *)$ mit $U \subseteq G$ eine ***Untergruppe*** von G, wenn U bezüglich $*$ eine Gruppe ist.

- Beispiele für Untergruppen bei Gruppen mit unendlich vielen Elementen.

- Beispiele für Untergruppen von endlichen Gruppen.

- Beispiel: Die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln.

- Satz

  Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es mindestens eine kommutative Gruppe der Ordnung n.

- Anmerkung: Schreiben wir für eine natürliche Zahl n die Verknüpfungstabelle der Gruppe $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ einerseits und die der Gruppe der n-ten Einheitswurzeln andererseits auf, so sehen wir, daß der Unterschied nur in der Bezeichnung der Gruppenelemente besteht. Wir wollen daher eine Sprech- und Schreibweise einführen, um sagen zu können, daß solche Gruppen „im wesentlichen gleich“ sind.

- Definition

  Die Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \cdot)$ heißen ***isomorph***, geschrieben $G \simeq H$, wenn eine bijektive Abbildung $f : G \to H$ existiert mit:

  $$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{für alle } a, b \in G.$$

- Anmerkung:

  (a) Anschaulich hat man bei isomorphen Gruppen nur „andere Buchstaben“; die Struktur ist gleich.

  (b) Die bijektive Abbildung f heißt ***Isomorphismus*** zwischen G und H.

- Satz

  Es seien G und H Gruppen mit neutralen Elementen $e \in G$ und $e' \in H$. Es sei $f : G \to H$ ein Isomorphismus. Dann gilt:

  $$f(e) = e' \quad \text{und} \quad f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \quad \text{für alle } a \in G.$$

- Beweis

- Beispiel

- Satz (Eigenschaften von Verknüpfungstabellen)

  In der Verknüpfungstabelle einer Gruppe kommt kein Element mehrfach in einer Zeile vor. Ebenso kommt kein Element mehrfach in einer Spalte vor.

- Beweis

- Anmerkung: Aber umgekehrt muß eine Tabelle mit dieser Eigenschaft *nicht* eine Gruppe darstellen.

- Beispiel: Endliche Gruppen der Ordnung 1 bis 5. Speziell Kleinsche Vierergruppe.

- Beispiel: Die Diedergruppe D_3. Es ergibt sich die folgende Verknüpfungstabelle.

	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_0	δ_0	δ_1	δ_2	σ_1	σ_2	σ_3
δ_1	δ_1	δ_2	δ_0	σ_2	σ_3	σ_1
δ_2	δ_2	δ_0	δ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	δ_0	δ_2	δ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	δ_1	δ_0	δ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	δ_2	δ_1	δ_0

- Satz

  Die Drehungen und Spiegelungen, die ein regelmäßiges n-Eck ($n \geq 3$) in sich selbst überführen, bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine nichtkommutative Gruppe, die ***Diedergruppe*** D_n.

  (Ohne Beweis)

- Satz

  Die Diedergruppe D_n hat die Ordnung $2n$, kurz

  $$|D_n| = 2n.$$

- Definition

  Eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst heißt ***Permutation***.

- Anmerkung: Es sei $M = \{1, 2, \dots, n\}$ und $\pi : M \to M$ eine Permutation von M mit $\pi(k) = a_k$. Die Schreibweise

  $$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

  ist üblich.

- Satz

  Die Menge aller Permutationen einer endlichen Menge bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe.

- Beweis

- Definition

  Es sei $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge mit n Elementen. Die Gruppe aller Permutationen von M heißt die ***symmetrische Gruppe*** vom Index n, kurz S_n.

- Anmerkung: Die Bezeichnung ***Permutationsgruppe*** wird für jede Gruppe, die aus Permutationen besteht, verwendet, also für S_n oder Untergruppen von S_n.

- Satz

  Die Ordnung der symmetrischen Gruppe S_n ist $n!$, kurz

  $$|S_n| = n!.$$

- Satz

  Die symmetrische Gruppe S_n ist kommutativ für $n = 1$ und $n = 2$ und nichtkommutativ für $n \geq 3$.

- Beweis

- Anmerkung: Speziell ist also die Gruppe S_3, die 6 Elemente enthält, nichtkommutativ. Wir können die Verknüpfungstabelle aufschreiben und mit der Tabelle der Diedergruppe D_3 vergleichen. Offensichtlich haben wir Strukturgleichheit und bekommen somit den folgenden Satz.

- Satz

  Die Gruppen S_3 und D_3 sind isomorph,

  $$S_3 \simeq D_3.$$