

## Graphen 4

### Bäume

- Definition

Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält, heißt ein **Baum**.

- Beispiele

- Anmerkung: Aufgrund des Zusammenhangs darf ein Baum nicht „zu wenige“ Kanten enthalten; damit keine Kreise vorkommen, dürfen es nicht „zu viele“ Kanten sein. Man kann bezüglich der Kantenzahl zeigen, daß Bäume minimal zusammenhängende Graphen und maximal kreisfreie Graphen sind. Dies liefert zwei von mehreren gleichwertigen Formulierungen, mit denen Bäume charakterisiert werden können.

- Satz (Äquivalente Beschreibungen von Bäumen)

Für einen schlichten Graphen  $G = (V, E)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a)  $G$  ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis.
- (b)  $G$  ist zusammenhängend, aber entfernt man eine beliebige Kante, entsteht ein nichtzusammenhängender Graph.
- (c)  $G$  enthält keinen Kreis, aber das Hinzufügen einer neuen Kante erzeugt einen Kreis.
- (d) Zwei beliebig herausgegriffene Knoten von  $G$  sind durch genau einen Kantenzug verbunden.
- (e)  $G$  ist zusammenhängend und  $|E| = |V| - 1$ .

Ohne Beweis.

- Definition

Wird bei einem Baum irgend ein Knoten besonders ausgezeichnet, dann nennt man den Baum einen **Wurzelbaum** und den ausgezeichneten Knoten die **Wurzel**.

- Anmerkung: Es sei  $v$  ein Knoten ungleich der Wurzel  $w$ . Dann gibt es einen eindeutigen Weg von  $w$  nach  $v$ . Der Knoten ungleich  $v$ , der  $v$  am nächsten ist und auf dem Weg liegt, heißt **Vater** von  $v$ . Die anderen Nachbarn von  $v$  heißen **Söhne** von  $v$ . Ein Knoten ohne Söhne heißt **Blatt**.
- Beispiel
- Problemstellung: Speichern von Bäumen.

Wie speichert man einen Baum in einem Computer? Das wird vom Verwendungszweck abhängen: welche Informationen später noch wofür benötigt werden, wie oft darauf zugegriffen wird u.s.w.

Unser Ziel ist es, eine Methode zu finden, die möglichst wenig Speicherplatz verbraucht.

- Wir betrachten einen Baum mit  $n$  Knoten, die von 0 bis  $n - 1$  durchnummeriert sind, und entwickeln Schritt für Schritt eine Methode, die uns schließlich einen optimalen Code liefert, den **Prüfer-Code**.
  - (a) Adjazenzmatrix
  - (b) Liste der Kanten
  - (c) Vater-Code
  - (d) Prüfer-Code

Die einzelnen Schritte werden an einem Beispiel illustriert.

- Anmerkung: Der Prüfer-Code liefert mehrere Ergebnisse auf einmal.
  - Eine Codierung von Bäumen, die bezüglich des Verbrauchs an Speicherplatz optimal ist.
  - Einen Beweis für eine Formel zur Anzahl der Bäume mit  $n$  Knoten (siehe den folgenden Satz).
  - Eine Möglichkeit zum Generieren von zufälligen Bäumen mit  $n$  Knoten, wobei alle Bäume mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen.
- Satz (Satz von Cayley)

Die Anzahl der Bäume mit  $n$  Knoten ist gleich  $n^{n-2}$ .

- Anmerkung: Die  $n$  Knoten sollen verschiedene Bezeichnungen haben, zum Beispiel Nummern von 0 bis  $n - 1$ . Zwei Bäume, die zwar isomorph sind, aber aufgrund der Knotennummern nicht übereinstimmen, werden als unterschiedlich angesehen. Der Satz von Cayley liefert die Anzahl dieser „labelled trees“.