

Graphen 2

Eckenfärbung

- Beispiel: Modellierung eines Planungsproblems mit einem Graphen.
- Definition
Die kleinste Anzahl an Farben, die eine Eckenfärbung des Graphen G dergestalt ermöglicht, daß zwei benachbarte Ecken stets unterschiedliche Farben haben, heißt die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ des Graphen (engl.: chromatic number).
- Beispiel
- Anmerkung: Der konkurrierende Zugriff auf eine Ressource kann mit Eckenfärbung modelliert werden. Dabei sind
 - Ecken: Akteure;
 - Kanten: Verbindungen zwischen denjenigen Akteuren, die beim Zugriff auf die Ressource in Konkurrenz zueinander treten;
 - $\chi(G)$: die Anzahl an Kopien, die von der Ressource mindestens vorhanden sein müssen, um alle Akteure zufriedenzustellen.
- Beispiele
- Anmerkung: Die Berechnung der chromatischen Zahl $\chi(G)$ (bzw. eine Eckenfärbung mit $\chi(G)$ Farben) erfordert bei einem Graphen mit vielen Ecken im allgemeinen sehr viel Rechenzeit und ist praktisch nicht durchführbar. Ein Ausweg ist, nicht die minimale Anzahl an Farben anzustreben, sondern eine „möglichst geringe“ Zahl.
- Algorithmus zur Eckenfärbung
 - (a) Nichtrekursiv formuliert.
 - Ecken in (beliebiger) Reihenfolge anordnen.
 - Eine Ecke nach der anderen färben; neue Farbe nur wenn notwendig.

(b) Rekursiv formuliert.

- Ecke v auswählen; v und inzidente Kanten aus Graph entfernen.
- Falls Eckenmenge nicht leer, rekursiv weiter.
- Ecke v wieder zum Graphen hinzufügen; einfärben, wobei Farbe unterschiedlich zu den Nachbarecken; neue Farbe falls notwendig.

- Satz

Der Algorithmus färbt einen Graphen mit höchstens $p + 1$ Farben, wobei p der maximale Eckengrad des Graphen ist.

- Beispiele

- Beweis

- Definition

Ein Graph heißt **planar** (oder **plättbar**), wenn er so in der Ebene gezeichnet werden kann, daß die Kanten sich nicht überschneiden.

- Beispiele

- Eckenfärbung und Landkarten.

- Satz (Vierfarbensatz)

Zu jedem planaren Graphen gibt es eine Eckenfärbung mit höchstens vier Farben.

(Ohne Beweis.)

- Anmerkung:

- (a) D.h. für jeden planaren Graphen G ist $\chi(G) \leq 4$.
- (b) Weniger als vier geht nicht, z.B. $\chi(K_4) = 4$.

- Definition

Ein Graph G , dessen chromatische Zahl $\chi(G) \leq 2$ ist, heißt ein **bipartiter** Graph.

- Anmerkung: Die Eckenmenge eines bipartiten Graphen zerfällt derart in zwei disjunkte Teilmengen, daß jede Kante des Graphen eine Ecke aus der einen Menge mit einer Ecke aus der anderen Menge verbindet.

- Beispiele