Graphen 1

Grundbegriffe, Isomorphie von Graphen

- Bei der Darstellung von Relationen haben wir gerichtete Graphen kennengelernt. Die informell eingeführten Begriffe und Bezeichnungen schreiben wir jetzt präzise in einer Definition auf.

- Definition

  Ein ***gerichteter Graph*** oder ***Digraph*** (kurz für „directed graph") $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von ***Ecken*** und einer Menge E von geordneten Paaren (a, b) mit a, $b \in V$, genannt ***Kanten***.

  Zur Kante (a, b) heißt a ***Anfangspunkt*** und b ***Endpunkt***. Eine Kante (a, a) heißt ***Schlinge***.

- Anmerkung: Es gibt viele alternative Bezeichnungen, auch die englischen Begriffe finden in deutschen Texten Verwendung, zumindest bei Abkürzungen.

  - Ecke, Knoten, Punkt; engl.: vertex (daher V), node, point.
  - Kante, Bogen; engl.: edge (daher E), arc.
  - Anfangspunkt; engl.: initial vertex, start point, tail.
  - Endpunkt; engl.: terminal vertex, end point, head.
  - Schlinge; engl.: loop.

- Anmerkung: Im folgenden betrachten wir auch ungerichtete Graphen.

- Definition

  Ein ***schlichter ungerichteter Graph*** $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V, den ***Ecken*** von G, und einer Menge E von ungeordneten Paaren $\{a, b\}$ mit a, $b \in V$ und $a \neq b$, den ***Kanten*** von G.

- Anmerkung: Bei einem schlichten Graphen (engl.: simple graph) sind zwei Ecken durch höchstens eine ungerichtete Kante verbunden; Schlingen sind verboten.

- Beispiele

- Anmerkung:

  (a) Ein „ungeordnetes Paar“ $\{a, b\}$, mit dem eine Kanten beschrieben wird, ist eine zweielementige Teilmengen von V. Also ist die Reihenfoge von a und b nicht festgelegt und die Kante hat keine Richtung.

  (b) Ein schlichter Graph enthält keine Schlingen, weil $a \neq b$ für jede Kante $\{a, b\}$ vorgeschrieben wird. (Eigentlich ist es überflüssig $a \neq b$ vorzuschreiben, da ja eine Menge kein Element doppelt enthält.)

  Ferner hat ein schlichter Graph keine Mehrfachkanten, da E eine Menge ist und somit ein Element $\{a, b\}$ nicht mehrfach enthalten kann.

  (c) Statt „schlichter ungerichteter Graph“ sagt man auch kurz „Graph“.

- Bezeichnungen:

  (a) Die Ecke a heißt ***inzident*** (engl.: incident) mit der Kante $\{a, b\}$, die „an der Ecke dranhängt“.

  Umgekehrt heißt auch die Kante $\{a, b\}$ ***inzident*** mit der Ecke a und ebenso mit der Ecke b.

  (b) Ist $\{a, b\} \in E$ (also a und b durch eine Kante verbunden), so heißen die Ecken a und b ***adjazent*** (engl.: adjacent) oder benachbart bzw. Nachbarn (engl.: neighbors).

- Anmerkung: Ein Graph kann durch eine ***Adjazenzmatrix*** beschrieben werden.

- Beispiel

- Anmerkung: Zu den Graphen, die nicht schlicht sind, gehören

  - Multigraphen (zwei Ecken dürfen durch mehrere Kanten verbunden sein),
  - gerichtete Graphen (hier sind auch Schlingen erlaubt),
  - gewichtete Graphen (die Kanten sind mit Beschriftungen versehen, oftmals Zahlenwerte, die eine Gewichtung darstellen).

- Beispiele

- Anmerkung: Spezielle schlichte Graphen sind

  (a) Kreis (cycle), C_n mit $n \geq 3$,

  (b) vollständiger Graph (complete graph), K_n mit $n = 1, 2, 3, \ldots,$

  (c) Rad (wheel), W_n mit $n \geq 3$.

- Anmerkung: Graphen werden vollständig durch die Eckenmenge und die Verbindungen zwischen den Ecken charakterisiert. Wird ein Graph gezeichnet, ist es egal, welche Ecke links und welche rechts liegt, ob die Kanten gerade oder gebogen sind u.s.w. Es müssen nur die Angaben aus Ecken- und Kantenmenge korrekt wiedergegeben werden.

  Man kann sich vorstellen, daß die Ecken verschiebbar und die Kanten Gummibänder sind, wodurch unterschiedliche „Bilder“ ermöglicht werden, die aber im graphentheoretischen Sinn denselben Inhalt haben.

  Gehen wir noch einen Schritt weiter. Wenn zwei Graphen mit der Gummibandmethode so übereinander gelegt werden können, daß sie komplett übereinstimmen, aber die Ecken unterschiedliche Bezeichnungen haben, dann sind die Graphen zwar nicht identisch aber auch nicht wesentlich verschieden.

  Wir führen den neuen Begriff der Isomorphie ein, um die Beziehung zwischen Graphen zu bezeichnen, die sich nur in der Benennung der Ecken voneinander unterscheiden.

- Beispiel

- Definition

  Die Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen ***isomorph*** genau dann, wenn eine Bijektion $f : V_1 \longrightarrow V_2$ existiert, so daß für alle a, $b \in V_1$ gilt

  $$\{a, b\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{f(a), f(b)\} \in E_2.$$

  Die Bijektion f heißt ein ***Isomorphismus*** zwischen den Graphen.

- Anmerkung: Entsprechend hat man bei einem Isomorphismus zwischen gerichteten Graphen geordnete Paare anstelle der zweielementigen Mengen, und es muß gelten

  $$(a, b) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a), f(b)) \in E_2.$$

- Beispiel

- Definition (Eckengrad)

  Der ***Grad der Ecke*** v (degree of vertex v) ist die Anzahl der mit v inzidenten Kanten, geschrieben $d(v)$.

- Beispiel

- Satz (Handshaking-Theorem)

  Bei einem schlichten Graphen $G = (V, E)$ mit n Kanten gilt

  $$\sum_{v \in V} d(v) = 2n.$$

- Beweis
- Satz

  Die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad ist gerade.
- Beweis
- Anmerkung: Bei isomorphen Graphen gibt es ***Invarianten***, die bei den beiden Graphen die gleichen Werte haben müssen, zum Beispiel
  - Eckenzahl,
  - Kantenzahl,
  - Anzahl der Ecken mit Grad d ($d = 0, 1, 2, \ldots$).
- Beispiel