

Relationen 6

Ordnungsrelationen

- Definition

Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt **Ordnung** (*Ordnungsrelation*), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- Beispiele

- Anmerkung: Bei vielen Spezialfällen von Ordnungen gibt es eigene Schreibweisen wie \leq , \geq , \subseteq u.s.w. Als allgemeine Notation wird bei Ordnungen oft

$$a \preceq b \quad \text{statt} \quad a R b$$

und

$$a \prec b \quad \text{statt} \quad a R b, a \neq b$$

verwendet.

- Anmerkung: Wenn man nicht will, daß Elemente von M zu sich selbst in Relation stehen, muß man alle Paare der Gestalt (a, a) aus einer Ordnungsrelation entfernen. Die neue Relation ist dann natürlich nicht mehr reflexiv. Ferner reicht die Bedingung der Antisymmetrie nicht aus; zur Verhinderung von $(a, a) \in R$ muß Asymmetrie gefordert werden.

- Definition

Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt **strikte Ordnung**, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

- Beispiele

- Anmerkung: Bei einer Ordnungsrelation (M, \preceq) kann es Elemente $a, b \in M$ geben, die nicht vergleichbar sind. Damit meinen wir, daß weder (a, b) noch (b, a) zur Relation gehört, also weder $a \preceq b$ noch $b \preceq a$ gilt.

- Beispiel: Wir betrachten $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, also die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen mit der Teilmengenrelation \subseteq . Hier sind z.B. die Elemente $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ aus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht vergleichbar, da weder $\{1, 2\} \subseteq \{2, 3\}$ noch $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2\}$ gilt.

- Definition

Es sei (M, \preceq) eine Menge mit einer Ordnungsrelation. Zwei Elemente $a, b \in M$ heißen **vergleichbar** bezüglich dieser Relation, wenn $a \preceq b$ oder $b \preceq a$ gilt.

Wenn weder $a \preceq b$ noch $b \preceq a$ gilt, heißen a und b **nicht vergleichbar**.

- Definition

Es sei (M, \preceq) eine Menge mit einer Ordnungsrelation. Gibt es in M zwei Elemente, die nicht vergleichbar sind, nennen wir die Ordnung eine **partielle Ordnung** (Teilordnung, Halbordnung). Sind alle Elemente aus M vergleichbar, heißt die Ordnung eine **totale Ordnung** (lineare Ordnung).

- Anmerkung: Entsprechend kann man eine partielle strikte Ordnung und eine totale strikte Ordnung definieren.

- Anmerkung: Die Begriffe Ordnung, partielle Ordnung, totale Ordnung werden in der Literatur nicht einheitlich definiert. Man muß also immer erst nachschauen, was mit diesen Begriffen in einem Buch gemeint ist.

- Beispiele

- Hasse-Diagramme

Jede Relation auf einer endlichen Menge kann mit einem gerichteten Graphen dargestellt werden. Ist die Relation eine Ordnung, kann man deren spezielle Eigenschaften für eine Vereinfachung des Digraphen nutzen und als gleichwertigen Ersatz ein **Hasse-Diagramm** zeichnen.

Die Vereinfachung des Digraphen geschieht in zwei Schritten.

- (a) Wir lassen alle Pfeile weg, die zwangsläufig da sein müssen: Schleifen (sind wegen der Reflexivität vorhanden); Pfeile, die es aufgrund der Transitivität geben muß.
- (b) Wir ordnen die Ecken so an, daß der Anfangspunkt eines Pfeils unterhalb des Endpunkts liegt. Damit ist die Richtung klar, und anstelle der Pfeile werden nur noch ungerichtete Kanten gezeichnet.

- Beispiele

- Definition

Es sei (M, \preceq) eine Menge mit einer Ordnungsrelation. Wir nennen $a \in M$ **minimal**, wenn kein $b \in M$ mit $b \prec a$ existiert.

Entsprechend heißt $a \in M$ **maximal**, wenn es kein $b \in M$ mit $a \prec b$ gibt.

- Beispiel

- Satz

Jede nichtleere endliche geordnete Menge hat ein minimales Element.

- Beweis

- Definition

Eine totale Ordnung \preceq in der Menge M heißt **kompatibel** mit der partiellen Ordnung R in M , wenn $a \preceq b$ gilt, falls $a R b$ ist.

Die Konstruktion einer kompatiblen Totalordnung zu einer partiellen Ordnung heißt **topologisches Sortieren**.

- Algorithmus zum topologischen Sortieren.

- Beispiel zum Algorithmus.

- Beispiele für Anwendungen von Ordnungsrelationen und für Anwendungen des topologischen Sortierens.

(a) Lexikographische Ordnung auf der Menge aller Zeichenketten.

(b) Abhängigkeiten bei der Reihenfolge von Tasks (z.B. in Makefiles).

(c) Projektplanung.

(d) PERT (Program Evaluation and Review Technique) und CPM (Critical Path Method).

(e) Unix-Tool `tsort`.

(f) Überprüfung hierarchischer Systeme auf Zyklensfreiheit.