Relationen 3

Mengenoperationen, Verkettungen, Wege

- Mengenoperationen mit Relationen.

  Die Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq A \times B$ sind Mengen. Also können R_1 und R_2 mit den üblichen Mengenoperationen verknüpft werden, und es entstehen neue Relationen zwischen A und B wie zum Beispiel $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$ u.s.w.

- Beispiel: Es sei A die Menge aller Studentinnen und Studenten aus dem Fachbereich MNI und B die Menge aller MNI-Veranstaltungen. Ferner sei

  $$R_1 = \{(a,b) \mid \text{Stud. } a \text{ hat den Schein von Veranstaltung } b\}$$

  und

  $$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ braucht den Schein } b \text{ für den Studienabschluß}\}.$$

  Welche Bedeutungen haben die Relationen $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$ und $(R_1 \cup R_2) \setminus (R_1 \cap R_2)$?

- Anmerkung: Die Boolschen Matrizen von $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ u.s.w. können mit Hilfe logischer Operatoren (UND, ODER u.s.w.) aus den Boolschen Matrizen von R_1 und R_2 gebildet werden.

- Verkettung von Relationen.

  Es sei A die Menge der Studenten/Studentinnen, B die Menge der Vorlesungen und C die Menge der Hörsäle. Zwischen A und B sei die Relation R_1 durch „… nimmt teil an der Vorlesung …“ gegeben. Ferner sei zwischen B und C durch „… findet statt im Hörsaal …“ die Relation R_2 definiert.

  Wie bekommt man aus R_1 und R_2 eine neue Relation zwischen A und C, die „… hat eine Vorlesung im Hörsaal …“ zum Inhalt hat?

- Definition (Verkettung von Relationen)

  Als ***Verkettung*** (***Komposition***, ***Produkt***) der Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ bezeichnen wir die Relation $R_1 \star R_2 \subseteq A \times C$ mit

  $$R_1 \star R_2 = \{(a,c) \in A \times C \mid \text{es existiert ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R_1 \text{ und } (b,c) \in R_2\}.$$

- Anmerkung:

  (a) Sind die Mengen A und B gleich, kann man die Verkettung von R mit sich selbst bilden. Statt $R \star R$ wird kurz R^2 geschrieben. Entsprechend steht R^3 für $R \star R^2$ u.s.w.

  (b) Anstelle des Symbols $\star$ wird oft $\circ$ verwendet, wie bei der Verkettung von Funktionen; in Lehrbüchern findet man dann statt $R_1 \star R_2$ sowohl die Schreibweise $R_1 \circ R_2$ als auch $R_2 \circ R_1$.

  Das hat folgenden Grund: Eine spezielle Klasse von Relationen sind die Funktionen. Angenommen R_1 und R_2 sind Funktionen; nennen wir sie der Gewohnheit folgend f (statt R_1) und g (statt R_2). Wir haben also $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$. Ein Element a aus A wird durch $g(f(a))$ auf ein Element aus C abgebildet. Daher schreibt man für die Verkettung von f und g meistens $g \circ f$. Wird diese Notation vom Spezialfall der Funktionen auf den allgemeineren Fall beliebiger Relationen übertragen, muß man $R_2 \circ R_1$ schreiben.

  Wir werden unten sehen, daß die Verkettung von Relationen mit einer abgewandelten Art der Matrizenmultiplikation berechnet werden kann. Links steht dabei die Boolsche Matrix von R_1 und rechts die von R_2. Hier ist $R_1 \star R_2$ die naheliegende Schreibweise.

  Zur Vermeidung von Unklarheiten verwenden wir für jede der beiden Reihenfolgen ein eigenes Symbol, nämlich $\star$ wie in der obigen Definition festgelegt und $\circ$ wie bei Funktionen, so daß also

  $$R_1 \star R_2 = R_2 \circ R_1$$

  gilt[1].

- Anmerkung: Die Verkettung zweier Relationen kann man durch boolsche Matrizenmultiplikation berechnen. Hierbei werden die Boolschen Matrizen der beiden Ausgangsrelationen genommen, und es wird eine Rechnung analog zur „normalen“ Matrizenmultiplikation durchgeführt, wobei aber die Ersetzung

  logisches ODER statt Addition ($\vee$ statt $+$),

  logisches UND statt Multiplikation ($\wedge$ statt $\cdot$)

  vorgenommen wird.

[1] manche meinen
lechts und rinks
kann man nicht velwechsern
werch ein illtum
(Ernst Jandl)

- Beispiel und graphische Veranschaulichung.
- Beispiel: Graphische Bestimmung von R^2 und R^3. Hierbei gibt es jeweils zwei Möglichkeiten der Darstellung: jedes Element der zugrundeliegenden Menge taucht nur einmal als Ecke auf, oder die Elemente werden mehrfach in Spalten nebeneinander geschrieben.
- Definition

  Ein ***Weg*** in einer Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Folge $a_0, \ldots, a_k$ mit $k \geq 0$ von Elementen aus A, so daß $(a_i, a_{i+1}) \in R$ für alle $0 \leq i < k$ gilt. Dabei heißt k die ***Länge*** des Weges.
- Anmerkung: Ein ***einfacher Weg*** ist ein Weg, bei dem kein Element mehrfach vorkommt.
- Satz

  Die Relation R^n ist die Menge aller Paare (a, b), für die es in R einen Weg der Länge n von a nach b gibt.
- Definition

  Es seien A und B Mengen.

  (a) Die Relation $\Delta \subseteq A \times A$ mit $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ heißt ***Diagonalrelation*** auf A.

  (b) Zu $R \subseteq A \times B$ heißt die Relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ mit

  $$R^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B,\ a \in A \text{ und } a\ R\ b\}$$

  die ***inverse Relation zu*** R.
- Beispiele
- Satz

  Es seien A, B und C Mengen und $R \subseteq A \times B$ sowie $S \subseteq B \times C$ Relationen. Ferner sei Δ die Diagonalrelation auf B. Dann gilt

  $$R \star \Delta = R \qquad \text{und} \qquad \Delta \star S = S.$$
- Anmerkung: Die inverse Relation hat nicht die Eigenschaften, die man bei diesem Namen erwartet. Es gibt Relationen R mit $R \star R^{-1} \neq \Delta$ und mit $R \star R^{-1} \neq R^{-1} \star R$.

  Die inverse Matrix der Boolschen Matrix von R stellt *nicht* die inverse Relation R^{-1} dar. Statt dessen bekommt man R^{-1} als Transponierte von R.