

Relationen 2

Eigenschaften

- Satz

Es sei M eine endliche Menge. Dann ist die Anzahl der Relationen auf M gleich

$$2^{|M|^2}.$$

Hierbei bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M .

- Beweis

- Anmerkung: Die Anzahl der Relationen wächst sehr schnell.

$ M $	Anzahl der Relationen
1	2
2	16
3	512
4	65536
5	33554432
6	68719476736
7	562949953421312
8	18446744073709551616
9	2417851639229258349412352
10	1267650600228229401496703205376

- Definition (Eigenschaften von Relationen)

Es sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf der Menge M . Dann heißt R

- reflexiv**, wenn $x R x$ für alle $x \in M$,
- symmetrisch**, wenn $(x R y) \Rightarrow (y R x)$ für alle $x, y \in M$,
- antisymmetrisch**, wenn $((x R y) \wedge (y R x)) \Rightarrow (x = y)$ für alle $x, y \in M$,
- asymmetrisch**, wenn $(x R y) \Rightarrow \neg(y R x)$ für alle $x, y \in M$,
- transitiv**, wenn $((x R y) \wedge (y R z)) \Rightarrow (x R z)$ für alle $x, y, z \in M$.

- Anmerkung: Natürlich kann es bei einer symmetrischen Relation auf M auch Elemente $x, y \in M$ mit $x \not R y$ geben, für diese gilt dann auch $y \not R x$.
- Anmerkung: Die Bedeutung der Antisymmetrie wird noch klarer, wenn man die Bedingung mit Kontraposition umformt:

$$[(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow (x = y)] \Leftrightarrow [(x \neq y) \Rightarrow \neg((x R y) \wedge (y R x))],$$

d.h. für zwei voneinander verschiedene Elemente x und y aus M kann nicht gleichzeitig $x R y$ und $y R x$ gelten.

- Anmerkung: Bei einer asymmetrischen Relation kann für kein $x \in M$ die Beziehung $x R x$ gelten.
- Bedeutung der Eigenschaften bei der Darstellung von Relationen durch gerichtete Graphen und Boolesche Matrizen.
- Beispiele