

## Relationen 2

### Eigenschaften

- Satz

Es sei  $M$  eine endliche Menge. Dann ist die Anzahl der Relationen auf  $M$  gleich

$$2^{|M|^2}.$$

Hierbei bezeichnet  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ .

- Beweis

- Anmerkung: Die Anzahl der Relationen wächst sehr schnell.

$ M $	Anzahl der Relationen
1	2
2	16
3	512
4	65536
5	33554432
6	68719476736
7	562949953421312
8	18446744073709551616
9	2417851639229258349412352
10	1267650600228229401496703205376

- Definition (Eigenschaften von Relationen)

Es sei  $R \subseteq M \times M$  eine Relation auf der Menge  $M$ . Dann heißt  $R$

- reflexiv**, wenn  $x R x$  für alle  $x \in M$ ,
- symmetrisch**, wenn  $(x R y) \Rightarrow (y R x)$  für alle  $x, y \in M$ ,
- antisymmetrisch**, wenn  $((x R y) \wedge (y R x)) \Rightarrow (x = y)$  für alle  $x, y \in M$ ,
- asymmetrisch**, wenn  $(x R y) \Rightarrow \neg(y R x)$  für alle  $x, y \in M$ ,
- transitiv**, wenn  $((x R y) \wedge (y R z)) \Rightarrow (x R z)$  für alle  $x, y, z \in M$ .

- Anmerkung: Natürlich kann es bei einer symmetrischen Relation auf  $M$  auch Elemente  $x, y \in M$  mit  $x \not R y$  geben, für diese gilt dann auch  $y \not R x$ .
- Anmerkung: Die Bedeutung der Antisymmetrie wird noch klarer, wenn man die Bedingung mit Kontraposition umformt:

$$[(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow (x = y)] \Leftrightarrow [(x \neq y) \Rightarrow \neg((x R y) \wedge (y R x))],$$

d.h. für zwei voneinander verschiedene Elemente  $x$  und  $y$  aus  $M$  kann nicht gleichzeitig  $x R y$  und  $y R x$  gelten.

- Anmerkung: Bei einer asymmetrischen Relation kann für kein  $x \in M$  die Beziehung  $x R x$  gelten.
- Bedeutung der Eigenschaften bei der Darstellung von Relationen durch gerichtete Graphen und Boolesche Matrizen.
- Beispiele