Vollständige Induktion

- Beispiel: Wir addieren die ersten n ungeraden Zahlen. Welches Ergebnis bekommen wir?

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1+3 &= 4 \\
1+3+5 &= 9 \\
1+3+5+7 &= 16 \\
1+3+5+7+9 &= 25 \\
1+3+5+7+9+11 &= 36 \\
1+3+5+7+9+11+13 &= 49 \\
1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64 \\
1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81 \\
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100
\end{aligned}$$

  Welche Vermutung liegt nahe? Wie kann man diese Vermutung *beweisen*?

- Es soll gezeigt werden, daß eine Aussageform $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu einer wahren Aussage wird.

  Im Beispiel ist die Aussageform $A(n)$ eine Gleichung mit der Variablen n. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ eine Aussage. Die ersten zehn davon sind aufgelistet.

- ***Vollständige Induktion*** (erste Form)

  Die Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben. Angenommen wir können beweisen:

  (a) Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist wahr.
  (b) Induktionsschritt: Aus $A(k)$ folgt $A(k+1)$ für jede natürliche Zahl k.

  Dann ist für jede natürliche Zahl n die Aussage $A(n)$ wahr.

- Beispiel: 6 teilt $n + 3n^2 + 2n^3$.

- Anmerkung: Statt bei $n = 1$ kann man auch bei $n = 0$ oder einer anderen ganzen Zahl beginnen.

- Beispiel: Die Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge M ist gleich $2^{|M|}$, wobei $|M|$ die Mächtigkeit von M, also die Anzahl der Elemente von M ist.

- Beispiel: Parkettierung einer Fläche aus 2^n mal 2^n Quadraten mit L-förmigen Fliesen, wobei ein vorgegebenes Quadrat der Fläche frei bleibt.

- Falsches Beispiel: Alle Pferde haben die gleiche Farbe.

- ***Vollständige Induktion*** (zweite Form)

  Die Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben. Angenommen wir können beweisen:

  (a) Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist wahr.

  (b) Induktionsschritt: Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ folgt aus der Gültigkeit von $A(1)$, $A(2)$, $\ldots$, $A(k)$ die Gültigkeit von $A(k+1)$.

  Dann ist $A(n)$ für jede natürliche Zahl n eine wahre Aussage.

- Beispiel: Wenn ein unbegrenzter Vorrat an 3 Cent und 5 Cent Briefmarken vorhanden ist, welche Frankierungen sind möglich?

- Beispiel: Eine Anzahl von Steinen liegt auf dem Tisch. Zwei Spieler nehmen abwechselnd Steine weg, dabei haben sie die Wahl, einen, zwei oder drei Steine zu entfernen. Der Spieler, der den letzten Stein wegnehmen muß, hat verloren.

  Der erste Spieler hat genau dann eine Gewinnstrategie, wenn zu Beginn die Anzahl der Steine nicht gleich $4m+1$ für eine $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist.

- Anmerkung: Die vollständige Induktion ist ein Axiom. Als Alternative kann man das Axiom der ***Wohlordnung*** einführen und damit die Korrektheit der vollständigen Induktion beweisen.

- Axiom (Wohlordnung, Least Number Principle)

  Jede nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

- Beweis der vollständigen Induktion (erste und zweite Form) mit dem Axiom der Wohlordnung.

- Beweis der Wohlordnung mit dem Axiom (zweite Form) der vollständigen Induktion.

- Anmerkung: Man kann entweder die Wohlordnung oder die erste Form der vollständigen Induktion oder die zweite Form der vollständigen Induktion als Axiom nehmen. Die beiden verbleibenden Aussagen lassen sich dann aus dem Axiom herleiten.