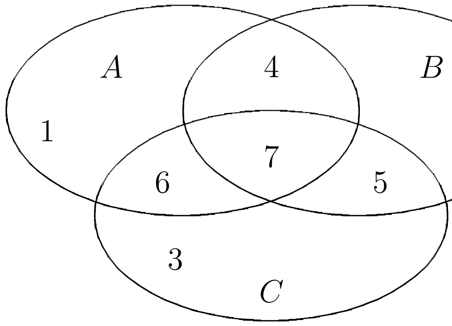
Mengen

Aufgabe 1.
Gegeben seien die folgenden drei sich überschneidenden Teilmengen A, B und C in der Ebene:



Wie erhält man die mit 1 bis 7 gekennzeichneten sich **nicht** überschneidenden Teilmengen der Ebene durch Mengenoperationen aus A, B und C?

Aufgabe 2.
Welche Ergebnisse liefern die folgenden Mengenoperationen?

1. $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\}$
2. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$
3. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5, 7\}$
4. $\{1, 2, 4, 8\} \cap \{x, y, z\}$
5. $\big(\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}\big) \cup \{x, y, z\}$
6. $\big(\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\}\big) \cap \{x, y, z\}$
7. $\{1, 5, 10\} \setminus \{x, y, z\}$
8. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \big(\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6\}\big)$

Aufgabe 3.
Es sei $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $B = \{-4, -2, 2, 4\}$. Welche Mächtigkeiten haben die Mengen: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B) \cup A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup A \cup A$, $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, $B \times A$?

Aufgabe 4.
Geben Sie zu $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ und $C = \{0\}$ die Menge $M = A \times B^2 \times C$ in der aufzählenden Darstellung an.

Aufgabe 5.
Es sei $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\} = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \leq i\}$ für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$. Welche Elemente sind in den folgenden Mengen enthalten?

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad M_2 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad M_3 = \bigcup_{i=1}^{20} (A_{2i} \setminus A_{2i-1})$$

Aufgabe 6.
Schreiben Sie die Potenzmengen von $M_1 = \{a, b\}$ und $M_2 = \{x, y, z\}$ auf.

Aufgabe 7.
Wenn A und B zwei endliche Mengen sind, dann gilt für die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Jetzt seien drei endliche Mengen A, B und C gegeben. Können Sie eine Formel für die Mächtigkeit der Vereinigung aller drei Mengen $|A \cup B \cup C|$ aufstellen? Es genügt eine anschauliche Argumentation mit einer Graphik.

Aufgabe 8.
Es seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die Distributivgesetze

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.