

Logik: Junktoren, Normalformen, Prädikate und Quantoren

Aufgabe 1.

Finden Sie eine Formel, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ ist und nur die Junktoren \neg , \wedge , \vee enthält. (Hierbei ist \oplus das exklusive Oder.) Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Wahrheitstafel.

Lösung: Es gibt verschiedene Formeln, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ sind. In der folgenden Wahrheitstafel wird gezeigt, daß

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$$

gilt. Man kann aber sehr ähnlich auch

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$$

bekommen. Die Gleichwertigkeit der beiden Formeln sieht man auch unmittelbar mit einer Regel von de Morgan, nach der

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$

gilt. Die anschauliche Bedeutung des exklusiven Oder kommt in der Formel aus der zweiten Äquivalenz $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ deutlich zum Ausdruck: ein Oder und gleichzeitig Nicht ein Und.

A	B	$A \oplus B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	f	w	w	w
f	w	w	w	w	f	w	w
f	f	f	f	w	w	w	f

Aufgabe 2.

Stellen Sie zunächst den Junktor \neg und anschließend den Junktor \wedge mit dem Sheffer-Operator $|$ (NAND-Operator) dar.

Lösung: Die Bedeutung des Sheffer-Operators ist Nicht-Und, daher ja auch der Name NAND-Operator, d.h. es gilt die logische Äquivalenz

$$A | B \equiv \neg(A \wedge B).$$

Setzen wir speziell $B = A$ ein, bekommen wir, weil $(A \wedge A) \equiv A$ ist,

$$A | A \equiv \neg(A \wedge A) \equiv \neg A.$$

Der Junktor \neg wird also mit dem Sheffer-Operator durch

$$\neg A \equiv A | A$$

dargestellt. Zur Verdeutlichung geben wir noch zwei Wahrheitstabeln an.

A	B	$A \wedge B$	$A B$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

A	$\neg A$	$A \wedge A$	$A A$
w	f	w	f
f	w	f	w

Als nächstes wollen wir den Junktor \wedge mit dem Sheffer-Operator darstellen. Dazu berücksichtigen wir, daß – mit einer doppelten Verneinung – der Ausdruck $A \wedge B$ die Negation von $\neg(A \wedge B)$ ist, also die Negation des Sheffer-Operators, so daß wir

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg(A \wedge B)) \equiv \neg(A | B)$$

haben. Oben haben wir aber gesehen, wie man eine Negation mit Hilfe des Sheffer-Operators darstellt, und können deshalb

$$\neg(A | B) \equiv (A | B) | (A | B)$$

schreiben. Damit gilt insgesamt die Darstellung

$$A \wedge B \equiv (A | B) | (A | B).$$

Zur Verdeutlichung wird auch noch die folgende Wahrheitstafel angegeben.

A	B	$A \wedge B$	$A B$	$\neg(A B)$	$(A B) (A B)$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	f	f
f	f	f	w	f	f

Aufgabe 3.

Stellen Sie zu der folgenden Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel ϕ in disjunktiver und eine in konjunktiver Normalform auf.

x	y	z	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Lösung: Für die disjunktive Normalform von ϕ ergibt sich

$$\phi = (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Wir konstruieren die DNF von ϕ , indem wir diejenigen Zeilen der Wahrheitstafel betrachten, für die ϕ den Wahrheitswert 1 annimmt.

Für jede dieser Zeilen schreiben wir eine Klammer auf, die genau dann wahr wird, wenn die atomaren Variablen x , y und z die Werte aus dieser speziellen Zeile haben.

Die Klammern werden mit Oder verknüpft, so daß der Gesamtausdruck wahr ist, wenn die Variablen die speziellen Werte aus einer der 1-er Zeilen haben.

Mit einer entsprechenden Überlegung für die 0-Zeilen bekommen wir die konjunktive Normalform

$$\phi = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Die Klammern der KNF heißen Klauseln. Sie werden mit Und verknüpft, damit die Formel nur dann wahr wird, wenn die Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten keiner der 0-Zeilen entspricht. Jede Klausel gehört zu einer 0-Zeile und wird für genau diese 0-Zeile falsch und für alle anderen Zeilen wahr. Hat man eine 1-er Zeile, sind alle Klauseln wahr, und die Formel ist insgesamt wahr.

Man kann die KNF von ϕ auch herleiten, indem man die DNF des negierten Ausdrucks $\neg\phi$ aufstellt, diese dann negiert und mit den Regeln von de Morgan umformt; dies wird im folgenden durchgeführt.

$$\begin{aligned} \phi &= \neg\left((\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)\right) \\ &= (\neg(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})) \wedge (\neg(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)) \wedge (\neg(x \wedge \bar{y} \wedge z)) \\ &= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Es sei $P(x)$ ein Prädikat und $M = \{a, b, c\}$ die Grundmenge zu x . Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente Aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\forall x P(x)$ | b) $\exists x P(x)$ | c) $\neg\forall x P(x)$ |
| d) $\neg\exists x P(x)$ | e) $\forall x \neg P(x)$ | f) $\exists x \neg P(x)$ |

Lösung: Da die Grundmenge endlich ist, kann man den Allquantor durch endlich viele Konjunktionen und den Existenzquantor durch endlich viele Disjunktionen ersetzen. Damit ergeben sich die folgenden logischen Äquivalenzen.

- a) $\forall x P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$
 b) $\exists x P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c)$
 c) $\neg\forall x P(x) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c))$

$$d) \neg \exists x P(x) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c))$$

$$e) \forall x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$$

$$f) \exists x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$$

Aufgabe 5.

Es sei $P(x)$ das Prädikat „ $x + 1 > 2x$ “. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen, wenn die Grundmenge aus allen ganzen Zahlen besteht?

$$a) P(0) \qquad b) P(-1) \qquad c) P(1) \qquad d) \exists x P(x)$$

$$e) \forall x P(x) \qquad f) \exists x \neg P(x) \qquad g) \forall x \neg P(x) \qquad h) \neg \forall x P(x)$$

Lösung:

- a) Die Aussage $P(0)$ bedeutet „ $1 > 0$ “, ist also wahr.
- b) $P(-1)$ steht für „ $0 > -2$ “, ist also wahr.
- c) $P(1)$ bedeutet „ $2 > 2$ “, ist also falsch.
- d) $\exists x P(x)$ ist wahr, da z.B. $P(0)$ wahr ist.
- e) $\forall x P(x)$ ist falsch, da z.B. $P(1)$ nicht wahr ist.
- f) $\exists x \neg P(x)$ ist wahr, z.B. ist $P(x)$ für $x = 1$ falsch, so daß $\neg P(1)$ wahr ist.
- g) $\forall x \neg P(x)$ ist falsch, z.B. ist $P(0)$ wahr, also $\neg P(0)$ falsch.
- h) $\neg \forall x P(x)$ ist wahr, weil $\forall x P(x)$ falsch ist.

Aufgabe 6.

Das Prädikat $P(x, y)$ stehe für „Student/Studentin x hat die Vorlesung y besucht“. Die Grundmenge zu x seien alle Studierenden und die Grundmenge zu y seien alle Vorlesungen des Fachbereichs MNI. Schreiben Sie die folgenden Aussagen als deutsche Sätzen auf.

$$a) \exists x \exists y P(x, y) \qquad b) \exists x \forall y P(x, y) \qquad c) \exists y \forall x P(x, y)$$

$$d) \forall x \exists y P(x, y) \qquad e) \forall y \exists x P(x, y) \qquad f) \forall x \forall y P(x, y)$$

Lösung: Um einen lesbaren Text zu bekommen verzichten wir auf die Schreibweise Student/Studentin u.s.w. und verwenden durchgehend den Begriff „Student“, der somit als neutral aufzufassen ist. Ferner schreiben wir einfach nur „Vorlesung“ und verweisen nicht mehr auf den Fachbereich MNI.

- a) Es gibt einen Studenten, der mindestens eine Vorlesung besucht hat.
- b) Es gibt einen Studenten, der alle Vorlesungen besucht hat.

- c) Es gibt eine Vorlesung, die von allen Studenten besucht wurde.
- d) Jeder Student hat mindestens eine Vorlesung besucht.
- e) Jede Vorlesung wurde von mindestens einem Studenten besucht.
- f) Jeder Student hat alle Vorlesungen besucht.

Aufgabe 7.

Es sei $P(x, y)$ das Prädikat „ x ist ein Teiler von y “. Die Grundmengen für x und für y sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage? Welche der Aussagen ist wahr, welche ist falsch?

- a) $P(10, y)$ b) $P(x, 100)$ c) $\forall xP(x, y)$ d) $\exists xP(x, 7)$
- e) $\forall x\exists yP(x, y)$ f) $P(3, 9)$ g) $P(3, 7)$ h) $\exists xP(x, 9)$
- i) $\forall xP(x, 9)$ j) $\exists x\forall yP(x, y)$ k) $\forall xP(x, x)$ l) $\forall yP(1, y)$

Lösung:

	Aussage/keine Aussage	wahr/falsch	Begründung
a)	keine Aussage	—	freie Variable y
b)	keine Aussage	—	freie Variable x
c)	keine Aussage	—	freie Variable y
d)	Aussage	wahr	1 teilt 7 und 7 teilt 7
e)	Aussage	wahr	z.B. jedes x teilt x
f)	Aussage	wahr	3 teilt 9
g)	Aussage	falsch	3 teilt nicht 7
h)	Aussage	wahr	z.B. 1 teilt 9
i)	Aussage	falsch	z.B. 2 teilt nicht 9
j)	Aussage	wahr	1 teilt jede natürliche Zahl
k)	Aussage	wahr	jede Zahl teilt sich selbst
l)	Aussage	wahr	1 teilt jede natürliche Zahl