

# Graphen

## Knotenfärbung

- Beispiel: Modellierung eines Planungsproblems mit einem Graphen.
- Definition

Die kleinste Anzahl an Farben, die eine Knotenfärbung des Graphen  $G$  dergestalt ermöglicht, daß zwei benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben haben, heißt die **chromatische Zahl**  $\chi(G)$  des Graphen (engl.: chromatic number).
- Beispiele
- Anmerkung: Der konkurrierende Zugriff auf eine Ressource kann mit Knotenfärbung modelliert werden. Dabei sind
  - Knoten: Akteure, die auf eine Ressource zugreifen;
  - Kanten: Verbindungen zwischen Akteuren, die nicht die selbe Version der Ressource nutzen können;
  - $\chi(G)$ : die Anzahl an Versionen, die mindestens von der Ressource vorhanden sein müssen, um alle Akteure zufriedenzustellen.
- Anmerkung: Die Berechnung der chromatischen Zahl  $\chi(G)$  (bzw. eine Knotenfärbung mit  $\chi(G)$  Farben) erfordert bei einem Graphen mit vielen Knoten im allgemeinen sehr viel Rechenzeit und ist praktisch nicht durchführbar. Ein Ausweg ist, nicht die minimale Anzahl an Farben anzustreben, sondern eine „möglichst geringe“ Zahl.
- Algorithmus zur Knotenfärbung
  1. Nichtrekursiv formuliert.
    - Knoten in (beliebiger) Reihenfolge anordnen.
    - Einen Knoten nach dem anderen färben; neue Farbe nur wenn notwendig.
  2. Rekursiv formuliert.
    - Knoten  $v$  auswählen;  $v$  und inzidente Kanten aus Graph entfernen.
    - Falls Knotenmenge nicht leer, rekursiv weiter.
    - Knoten  $v$  wieder zum Graphen hinzufügen; einfärben, wobei Farbe unterschiedlich zu den Nachbarknoten; neue Farbe falls notwendig.

- Satz

Der Algorithmus färbt einen Graphen mit höchstens  $p + 1$  Farben, wobei  $p$  der maximale Knotengrad des Graphen ist.

- Beispiele

- Beweis

- Definition

Ein Graph heißt **planar** (oder **plättbar**), wenn er so in der Ebene gezeichnet werden kann, daß die Kanten sich nicht überschneiden.

- Beispiele

- Knotenfärbung und Landkarten.

- Satz (Vierfarbensatz)

Zu jedem planaren Graphen gibt es eine Knotenfärbung mit höchstens vier Farben.

(Ohne Beweis.)

- Anmerkung:

1. D.h. für jeden planaren Graphen  $G$  ist  $\chi(G) \leq 4$ .

2. Weniger als vier geht nicht, z.B.  $\chi(K_4) = 4$ .

- Definition

Ein Graph  $G$ , dessen chromatische Zahl  $\chi(G) \leq 2$  ist, heißt ein **bipartiter** Graph.

- Anmerkung: Die Knotenmenge eines bipartiten Graphen zerfällt derart in zwei disjunkte Teilmengen, daß jede Kante des Graphen einen Knoten aus der einen Menge mit einem Knoten aus der anderen Menge verbindet.

- Beispiele