

Relationen

Äquivalenzrelationen

- Definition

Eine Relation $R \subseteq M^2$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Anmerkung: Bei Äquivalenzrelationen verwendet man statt $a R b$ üblicherweise die Schreibweise $a \sim b$.

- Beispiele

- Definition

Es sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M . Zu jedem $a \in M$ bezeichne $[a]$ die Menge aller Elemente von M , zu denen a in Relation steht, also

$$[a] = \{x \in M \mid a \sim x\}.$$

Die Menge $[a]$ heißt **Äquivalenzklasse** von a bezüglich R . Das Element a heißt ein Repräsentant von $[a]$.

- Beispiele

- Definition

Es sei M eine Menge. Die Teilmengen M_1, \dots, M_k bilden eine **Zerlegung** (**Partition**) von M , wenn gilt:

1. $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (paarweise disjunkte Mengen),
2. $\bigcup_{i=1}^k M_i = M$ (Vereinigung ist gleich M).

- Anmerkung: Entsprechend bei unendlich vielen Teilmengen. Die Vereinigung muß dann über alle unendlich vielen Mengen gebildet werden.

- Skizze und Beispiele.

- Satz

Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf der Menge M bilden eine Zerlegung von M . D.h. die Vereinigung der Äquivalenzklassen ist gleich M , und für alle $a, b \in M$ gilt entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$.

- Beweis
- Beispiele
- Satz

Gegeben sei eine Menge M sowie eine Zerlegung von M durch die Teilmengen M_1, \dots, M_k . Dann wird durch die Relation \sim mit

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ und } b \text{ liegen in derselben Teilmenge } M_i$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

- Anmerkung: Entsprechend bei unendlich vielen Teilmengen.
- Beweis
- Beispiele