

## Relationen

### Wege, Hüllen

- Definition

Ein **Weg** in einer Relation  $R \subseteq A \times A$  ist eine Folge  $a_0, \dots, a_k$  mit  $k \geq 0$  von Elementen aus  $A$ , so daß  $(a_i, a_{i+1}) \in R$  für alle  $0 \leq i < k$  gilt. Dabei heißt  $k$  die **Länge** des Weges.

- Anmerkung: Ein **einfacher Weg** ist ein Weg, bei dem kein Element mehrfach vorkommt.

- Satz

Die Relation  $R^n$  ist die Menge aller Paare  $(a, b)$ , für die es in  $R$  einen Weg der Länge  $n$  von  $a$  nach  $b$  gibt.

- Definition

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen.

1. Die Relation  $\Delta \subseteq A \times A$  mit  $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$  heißt **Diagonalrelation** auf  $A$ .
2. Zu  $R \subseteq A \times B$  heißt die Relation  $R^{-1} \subseteq B \times A$  mit

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A \text{ und } a R b\}$$

die **inverse Relation zu  $R$** .

- Beispiele

- Satz

Es seien  $A, B$  und  $C$  Mengen und  $R \subseteq A \times B$  sowie  $S \subseteq B \times C$  Relationen. Ferner sei  $\Delta$  die Diagonalrelation auf  $B$ . Dann gilt

$$R \star \Delta = R \quad \text{und} \quad \Delta \star S = S.$$

- Anmerkung: Die inverse Relation hat nicht die Eigenschaften, die man bei diesem Namen erwartet. Es gibt Relationen  $R$  mit  $R \star R^{-1} \neq \Delta$  und mit  $R \star R^{-1} \neq R^{-1} \star R$ .

Die inverse Matrix der Booleschen Matrix von  $R$  stellt *nicht* die inverse Relation  $R^{-1}$  dar. Statt dessen bekommt man  $R^{-1}$  als Transponierte von  $R$ .

- Definition

Zur Relation  $R$  heißt die Relation  $S$  die **reflexive Hülle**, falls

1.  $R \subseteq S$ ,
2.  $S$  ist reflexiv,
3.  $S$  ist enthalten in jeder reflexiven Relation, die  $R$  enthält.

- Anmerkung:

1. Entsprechend werden die **symmetrische** und die **transitive** Hülle einer Relation definiert.
2. Aufgrund der dritten Bedingung ist  $S$  die **kleinste** Relation, die die ersten beiden Eigenschaften besitzt.

- Satz

Es sei  $R \subseteq A \times A$  eine Relation auf  $A$ .

1.  $R \cup \Delta$  ist die reflexive Hülle von  $R$ , wobei  $\Delta$  die Diagonalrelation auf  $A$  bezeichnet.
2.  $R \cup R^{-1}$  ist die symmetrische Hülle von  $R$ .

- Beispiel

- Satz

Es sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $A$ . Die transitive Hülle von  $R$  ist die Menge

$$S = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{es gibt in } R \text{ einen Weg von } a \text{ nach } b\}.$$

- Beispiel

- Beweis

- Anmerkung: Wie können wir die transitive Hülle  $S$  berechnen?

Wir wissen, daß

$$S = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{es gibt in } R \text{ einen Weg von } a \text{ nach } b\}$$

ist, das Paar  $(a, b)$  also genau dann zur transitiven Hülle gehört, wenn es *irgendeinen* Weg von  $a$  nach  $b$  gibt, egal welche Länge er hat.

Alle Paare  $(a, b)$ , bei denen es einen Weg der Länge  $n$  von  $a$  nach  $b$  gibt, bilden aber die Menge  $R^n$ , denn

$$R^n = \{(a, b) \mid \text{es gibt in } R \text{ einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b\}.$$

Also ist

$$S = \underbrace{R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots}_{\text{unendlich viele Mengen}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.$$

Jetzt bleibt uns noch ein Problem: wir müssen unendlich viele Mengen vereinigen, haben also noch kein endliches Verfahren.

- Satz

Es sei  $A$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen und es sei  $R$  eine Relation auf  $A$ . Ferner seien  $a, b \in A$ .

Wenn es in  $R$  einen Weg von  $a$  nach  $b$  gibt, dann gibt es in  $R$  einen Weg von  $a$  nach  $b$ , der *höchstens die Länge*  $n$  hat.

- Beweis

- Anmerkung: Also kann die transitive Hülle von  $R$  durch

$$S = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

berechnet werden.

Wir haben nur noch *endlich viele* Mengen, können die Berechnung also mit Sicherheit in *endlich vielen Schritten* durchführen. Damit haben wir ein Verfahren, um die Berechnung der transitiven Hülle (bei einer Relation auf einer endlichen Menge) zu programmieren.

Hat man einen Algorithmus zur Lösung einer Problemstellung gefunden, dann geht es um die Verbesserung der Laufzeit, eventuell auch durch eine neue Lösungsmethode. Effizienter als unser Verfahren ist der Warshall-Algorithmus. Wir verweisen auf die Literatur. (Siehe z.B.: Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications.)

- Beispiele für Anwendungen transitiver Hüllen.

1. Bahnverbindungen (direkt oder indirekt von  $a$  nach  $b$ ).
2. Erstellen von Stücklisten aus Datenbanken.
3. Kommunikationsnetze (Datenübertragung über Zwischenstationen).
4. Compilerbau.