Kombinatorik

Kombinationen und Binomialkoeffizienten

- Wieviel Ziehungsergebnisse sind beim Lotto (6 aus 49) möglich?

- Definition (Kombination ohne Wiederholung)

  Eine ***Kombination* $\mathbf{k}$*-ter Ordnung von* $\mathbf{n}$ *Elementen ohne Wiederholung*** ist eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge.

  $c(n, k)$ bezeichne die Anzahl aller solcher Teilmengen.

- Satz

$$c(n, k) = \binom{n}{k}$$

- Beweis

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, fünf Freikarten für ein Konzert von Shakira auf 34 Studierende zu verteilen, wenn jeder auch mehrere Freikarten bekommen darf?

- Definition (Kombination mit Wiederholung)

  Eine ***Kombination* $\mathbf{k}$*-ter Ordnung von* $\mathbf{n}$ *Elementen mit Wiederholung*** entsteht, wenn k Elemente aus einer n-elementigen Menge herausgegriffen werden, wobei die Reihenfolge egal ist, und Wiederholungen erlaubt sind.

  $c^*(n, k)$ bezeichne die mögliche Anzahl solcher Kombinationen.

- Anmerkung: Eine andere Formulierung ist mit Hilfe des Begriffs der Mehrfachmenge möglich.

- Satz

$$c^*(n, k) = \binom{n + k - 1}{k} = \binom{n + k - 1}{n - 1}$$

- Beweis

- Anmerkung: Bei Variationen spielt die Reihenfolge eine Rolle, bei Kombinationen nicht.

  Alle Fälle (Variation oder Kombination, Wiederholung oder keine Wiederholung) lassen sich auch mit dem Modell einer Urne, in der duchnumerierte Kugeln liegen, veranschaulichen. Dabei darf keine Nummer mehrfach vorkommen.

Zieht man Kugeln aus der Urne, kann man die Nummern in der Reihenfolge der Ziehungen aufschreiben, oder man notiert die Nummern unabhängig von der Reihenfolge; z.B. werden die Lottozahlen immer aufsteigend genannt.

Nach der Ziehung einer Kugel, kann man diese wieder in die Urne zurücklegen, dann kann sie bei der nächsten Ziehung wieder dran kommen. Oder man läßt die Kugel draußen, dann erhält man bei jeder Ziehung eine andere Zahl.

Wir haben also vier Fälle.

	Reihenfolge beachten	Reihenfolge ignorieren
ohne Zurücklegen	Variation ohne Wiederholung	Kombination ohne Wiederholung
mit Zurücklegen	Variation mit Wiederholung	Kombination mit Wiederholung

- Definition (Binomialkoeffizient)

  Das Symbol $\binom{n}{k}$ heißt ***Binomialkoeffizient*** (gelesen „n über k“), und ist durch

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

  für n, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n \geq k$ definiert.

- Anmerkung

  Für die Berechnung ist oft folgende Regel vorteilhaft: $\binom{n}{k}$ ist ein Bruch mit jeweils k Faktoren im Zähler und im Nenner, im Zähler beginnend bei n und absteigend, im Nenner beginnend bei 1 und aufsteigend.

  $$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \overbrace{(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}^{=(n-k)!}}{(n-k)!\,k!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \end{aligned}$$

- Beispiele

- Satz (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten)

  (a) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$,

(b) $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$,

(c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

(d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

- Pascalsches Dreieck.
- Beweis des Satzes.
- Spezielle binomische Formeln.

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & a+b \\
(a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
& \text{u.s.w.} &
\end{array}$$

Die Koeffizienten der binomischen Formeln entsprechen den Binomialkoeffizienten, wie sie im Pascalschen Dreieck angeordnet sind.

- Satz (Binomische Formel)

$$(a+b)^n$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

- Anmerkung: Der Beweis der allgemeinen binomischen Formel erfolgt mit vollständiger Induktion nach n.
- Satz

  Eine Menge von n Elementen hat 2^n Teilmengen.
- Beweis: mit Hilfe einer Summe von Binomialkoeffizienten und der Binomischen Formel.