Kombinatorik

Permutationen und Variationen

- Beim Mittagessen in der Mensa haben wir die Auswahl aus drei Menüs, vier Salaten und zwei Desserts. Wieviele Möglichkeiten der „Belegung“ der Teller gibt es insgesamt?

- Satz

  Es sollen k Positionen $P_1, \ldots, P_k$ vorliegen. Es gebe

  n_1 Möglichkeiten, P_1 zu belegen,

  n_2 Möglichkeiten, P_2 zu belegen,

  $\vdots$

  n_k Möglichkeiten, P_k zu belegen.

  Dann gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Belegungsmöglichkeiten.

- Beweis

- Sie wollen drei Poster (Snoopy, Charlie Brown und Lucy) nebeneinander an die Wand hängen. Wieviele unterschiedliche Reihenfolgen gibt es?

- Definition (Permutation)

  Eine n-stellige ***Permutation*** ist eine Anordnung von n paarweise verschiedenen Elementen zu einem n-Tupel.

  Zu n paarweise verschiedenen Elementen bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller n-stelligen Permutationen.

- Beispiel: Elemente a, b, c. Gesucht sind alle 3-stelligen Permutationen in lexikographischer Anordnung.

- Definition (n-Fakultät)

  Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird als **n-*Fakultät*** bezeichnet und $n!$ geschrieben:
  $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

- Satz
  $$p(n) = n!$$

Copyright © 2011 Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz. All rights reserved.

- Beweis
- Beispiele:
  - Snoopy, Charlie Brown und Lucy;
  - Reihenfolge bei der Ausführung verschiedener Programme.
- Unter den 60 Personen im Hörsaal werden drei Preise (Eintrittskarten) verlost (Erstsemesterfete, Spiel der Eintracht Frankfurt, Konzert von Shakira). Dazu werden nacheinander drei Personen herausgegriffen. Zunächst wird der dritte, dann der zweite und schließlich der erste Preis vergeben. Da die Preise unterschiedlich viel wert sind, ist die Reihenfolge beim Herausgreifen wichtig. Wieviel Ziehungsergebnisse sind möglich?
- Definition (Variation ohne Wiederholung)

  Es sei M eine Menge mit n Elementen, und es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Eine ***Variation* $\mathbf{k}$*-ter Ordnung von* $\mathbf{n}$ *Elementen ohne Wiederholung*** ist ein k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_1, \ldots, a_k \in M$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$.

  $v(n, k)$ bezeichne die Anzahl dieser Variationen.
- Anmerkung: Der Spezialfall $k = n$ gibt eine n-stellige Permutation, also ist $v(n, n) = p(n) = n!$.
- Beispiel: Mengen $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{a, b, c\}$ und $M_3 = \{a, b, c, d\}$; jeweils alle Variationen 2. Ordnung auflisten; Werte von $v(2, 2)$, $v(3, 2)$ und $v(4, 2)$ bestimmen.
- Satz

$$v(n, k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n - (k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot k!$$

- Anmerkung: $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ist eine Abkürzung für $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.
- Beweis
- Beispiel: Verlosung von drei unterschiedlichen Preisen unter 60 Personen; Anzahl Ziehungsergebnisse: $v(60, 3)$.
- Wieviele unterschiedliche Dateiendungen aus drei Buchstaben gibt es maximal? Anders formuliert: Wir haben 26 Buchstaben, greifen drei heraus, wobei Wiederholungen erlaubt sind, und berücksichtigen die Reihenfolge der Ziehungen. Wieviel Ergebnisse sind möglich?
- Definition (Variation mit Wiederholung)

  Eine ***Variation* $\mathbf{k}$*-ter Ordnung von* $\mathbf{n}$ *Elementen mit Wiederholung*** ist ein k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ aus Elementen einer n-elementigen Menge.

  $v^*(n, k)$ bezeichne die Anzahl dieser Variationen.

- Anmerkung: $a_i = a_j$ für $i \neq j$ ist zulässig.
- Beispiel: Mengen $M_1 = \{a, b\}$ und $M_2 = \{a, b, c\}$; jeweils alle Variationen 2. Ordnung auflisten; Werte von $v^*(2, 2)$ und $v^*(3, 2)$ bestimmen.
- Satz
$$v^*(n, k) = n^k$$
- Beweis
- Beispiele:
  - Wörter der Länge k aus n Zeichen;
  - Fußballtoto.