Vollständige Induktion

- Beispiel: Wir addieren die ersten n ungeraden Zahlen. Welches Ergebnis bekommen wir?

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \\ 1+3+5+7+9+11 &= 36 \\ 1+3+5+7+9+11+13 &= 49 \\ 1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64 \\ 1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81 \\ 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100 \end{aligned}$$

  Welche Vermutung liegt nahe? Wie kann man diese Vermutung *beweisen*?

- Es soll gezeigt werden, daß eine Aussageform (ein Prädikat) $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu einer wahren Aussage wird.

  Im Beispiel ist die Aussageform $A(n)$ eine Gleichung mit der Variablen n. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ eine Aussage; die ersten zehn Aussagen sind aufgelistet.

- ***Vollständige Induktion*** (erste Form)

  Die Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben. Angenommen wir können beweisen:

  1. Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist wahr.
  2. Induktionsschritt: Aus $A(k)$ folgt $A(k+1)$ für jede natürliche Zahl k.

  Dann ist für jede natürliche Zahl n die Aussage $A(n)$ wahr.

- Anmerkung: Die im Induktionsschritt für ein festgehaltenes k auftretende Aussage $A(k)$ nennt man *Induktionsannahme*.

- Beispiel: Summe der ersten n ungeraden Zahlen.

- Beispiel: 6 teilt $n + 3n^2 + 2n^3$.

- Anmerkung: Statt bei $n = 1$ kann man auch bei $n = 0$ oder einer anderen ganzen Zahl beginnen.

- Beispiel: Die Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge M ist gleich $2^{|M|}$, wobei $|M|$ die Mächtigkeit von M, also die Anzahl der Elemente von M ist.

- Beispiel: Parkettierung einer Fläche aus 2^n mal 2^n Quadraten mit L-förmigen Fliesen, wobei ein vorgegebenes Quadrat der Fläche frei bleibt.

- Falsches Beispiel: Alle Pferde haben die gleiche Farbe.

- ***Vollständige Induktion*** (zweite Form)

  Die Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei gegeben. Angenommen wir können beweisen:

  1. Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist wahr.
  2. Induktionsschritt: Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ folgt aus der Gültigkeit von $A(1)$, $A(2)$, ..., $A(k)$ die Gültigkeit von $A(k+1)$.

  Dann ist $A(n)$ für jede natürliche Zahl n eine wahre Aussage.

- Beispiel: Wenn ein unbegrenzter Vorrat an 3 Cent und 5 Cent Briefmarken vorhanden ist, welche Frankierungen sind möglich?

- Anmerkung: Die vollständige Induktion ist ein Axiom. Als Alternative kann man das Axiom der *Wohlordnung* einführen.

- Axiom (***Wohlordnung***, Least Number Principle)

  Jede nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

- Anmerkung: Axiome werden nicht bewiesen sondern als gültig angenommen. Bezüglich der vollständigen Induktion und der Wohlordnung hat man drei Möglichkeiten.

  1. Man kann die erste Form der vollständigen Induktion als Axiom nehmen und daraus die Gültigkeit der zweiten Form sowie der Wohlordnung herleiten. Dann ist die Wohlordnung ein Satz und kein Axiom.
  2. Entsprechend kann die zweite Form der vollständigen Induktion als Axiom genommen und damit die erste Form der Induktion sowie die Wohlordnung bewiesen werden.
  3. Man nimmt die Wohlordnung als Axiom und leitet daraus die beiden Formen der vollständigen Induktion als Sätze her.