Funktionen

Folgen und Reihen

- Definition

  Wird jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl a_n zugeordnet, so entsteht eine ***unendliche Zahlenfolge***

  $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

  Schreibweise: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n).

  Die Zahlen a_n heißen ***Glieder*** der Folge.

- Anmerkung:

  1. Die Indizierung darf statt mit 1 auch mit jeder anderen ganzen Zahl beginnen.
  2. Eine Folge kann als Funktion f mit

     $$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad f(n) = a_n$$

     aufgefaßt werden.
  3. Die Vorschrift $a_n = f(n)$ heißt ***Bildungsgesetz*** der Folge.
  4. Eine ***endliche*** Folge

     $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m$$

     wird entsprechend geschrieben: $(a_n)_{n=1}^{m}$.
  5. Da eine endliche Folge $(a_n)_{n=1}^{m}$ nichts anderes als ein m-Tupel ist, verwendet man auch dieselbe Schreibweise wie bei Paaren (x, y) oder Tripeln (x, y, z) und setzt die Liste der Elemente in Klammern, schreibt also

     $$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m)$$

     oder auch

     $$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$$

     im Falle von unendlichen Folgen.

- Beispiele: arithmetische Folge, geometrische Folge.

- Anmerkung: Folgen können ***rekursiv*** definiert werden.

- Beispiele: Potenz, Fakultät, Fibonacci-Folge.

- Wenn eine Zahlenfolge (a_n) sich für immer größere Indexwerte n „immer mehr einem Zahlenwert g annähert", dann nennen wir die Folge *konvergent*. Wir bezeichnen g dann als *Grenzwert* der Folge und sagen, daß die Folge gegen den Grenzwert *konvergiert*. (Diese anschauliche Vorstellung reicht für unsere Zwecke aus. Für die exakte Definition sei auf die Literatur verwiesen.)

- Beispiel: Die irrationale Zahl $e = 2,71\ldots$ ist der Grenzwert der unendlichen Folge, die aus den Zahlen
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
besteht. Ein anschaulicher Begriff der Konvergenz entsteht, wenn man die folgende Tabelle betrachtet, die einige Werte von a_n für wachsendes n enthält. (Die letzten Stellen sind gerundet.)

n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n
1	2.000000	10	2.593742	100	2.704814	1000	2.716924
2	2.250000	20	2.653298	200	2.711517	2000	2.717603
3	2.370370	30	2.674319	300	2.713765	3000	2.717829
4	2.441406	40	2.685064	400	2.714892	4000	2.717942
5	2.488320	50	2.691588	500	2.715569	5000	2.718010
6	2.521626	60	2.695970	600	2.716020	6000	2.718055
7	2.546500	70	2.699116	700	2.716343	7000	2.718088
8	2.565785	80	2.701485	800	2.716585	8000	2.718112
9	2.581175	90	2.703332	900	2.716773	9000	2.718131
10	2.593742	100	2.704814	1000	2.716924	10000	2.718146

Die exakten ersten sechs Nachkommastellen sind $e \approx 2,718281$ (ohne Rundung der letzten Stelle).

- Die endliche Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ wird auch als
$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$
geschrieben. Bei systematisch aufgebauten Summanden a_n kann es Formeln zur Berechnung des Summenwertes geben. Ein bekanntes Beispiel geht auf Gauß zurück.

- Satz (Gaußsche Summenformel)

  Es gilt:
$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}\,.$$

- Geht man — anschaulich gesprochen — von einer endlichen Summe zu einer unendlichen Summe über, so erhält man eine Reihe.

- Definition

  Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so heißt der Ausdruck

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

  eine ***Reihe***. Die a_n heißen die ***Glieder*** der Reihe.

- Anmerkung: Die Ausführung unendlich vieler Additionen ist nicht möglich. Wir betrachten deshalb die Folge (s_m) der endlichen ***Partialsummen***

  $$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

  Wenn die Folge (s_m) gegen den Wert s konvergiert, heißt die Reihe *konvergent* zur Summe s. Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

  Die Reihe heißt *divergent*, wenn die Folge (s_m) keinen endlichen Grenzwert besitzt.

- Beispiele: harmonische Reihe, geometrische Reihe.

- Satz

  Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist für $|q| < 1$ konvergent und für $|q| \geq 1$ divergent. Es gilt

  $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1.$$

- Beweis

- Anmerkung: Der Beweis liefert auch eine Formel für die Berechnung endlicher geometrischer Reihen.

- Satz

  Es gilt

  $$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

  für beliebige Werte von q.

- Beispiele für nicht-geometrische Reihen, die gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, sind im folgenden (ohne Herleitung) aufgelistet.

  $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots = \ln 2$$

  $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

  $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Diese Reihen haben eine erhebliche theoretische Bedeutung, werden aber nicht für die praktische Berechnung von π verwendet, da die Konvergenz sehr langsam ist.

- Eine Reihe, die sehr schnell konvergiert, ist

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Ferner wird die sogenannte e-Funktion $f(x) = e^x$ durch die Reihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

dargestellt. Wegen der sehr schnellen Konvergenz findet diese Formel in Softwarepaketen praktische Anwendung.

Die folgende Tabelle enthält einige Werte der Partialsumme $s_m = \sum_{n=0}^{m} 1/n!$.

m	s_m	m	s_m
0	1.000000000000000	8	2.718278769841270
1	2.000000000000000	9	2.718281525573192
2	2.500000000000000	10	2.718281801146385
3	2.666666666666667	11	2.718281826198493
4	2.708333333333333	12	2.718281828286169
5	2.716666666666666	13	2.718281828446759
6	2.718055555555555	14	2.718281828458230
7	2.718253968253968	15	2.718281828458995

Ein Vergleich der Werte dieser Tabelle mit den Werten in der Tabelle von $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zeigt den Unterschied der Konvergenzgeschwindigkeiten.