Zahlenmengen

Komplexe Zahlen

- Im folgenden führen wir die ***komplexen Zahlen*** ein. Zunächst machen wir uns klar, warum die reellen Zahlen nicht ausreichen; dann betrachten wir die vier Grundrechenarten für die komplexen Zahlen.

- Problemstellung: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Skizze.

- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von $\mathbb{R}$ (ähnlich: Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$).

- Definition

  Das Symbol i sei eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$. Wir nennen i die ***imaginäre Einheit***.

- Anmerkung: In den Ingenieurwissenschaften verwendet man anstelle von i auch das Symbol j, weil i in der Elektrotechnik für die Stromstärke steht.

- Anmerkung: Das Rechnen mit i „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. $2i$, $\frac{5}{2}\,i$ und $(-\frac{7}{3})i$. Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. $6 + 2i$ oder $5 - \frac{7}{3}\,i$. Ferner ist $2i = i2$ und $6 + 2i = 2i + 6$ u.s.w.

- Definition

  Zahlen der Gestalt bi mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ heißen ***(rein) imaginäre Zahlen***.

  Zahlen der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen ***komplexe Zahlen***. Wir bezeichnen

  $$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi;\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$$

  als ***Menge der komplexen Zahlen***.

  Zu $z = a + bi$ heißt $a = \mathrm{Re}(z)$ der ***Realteil*** von z und $b = \mathrm{Im}(z)$ der ***Imaginärteil*** von z.

- Anmerkung: Man beachte, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine reelle Zahl ist.

- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Anmerkung: Es gilt

$$\begin{aligned} a+bi = c+di \quad &\Leftrightarrow \quad a = c \text{ und } b = d, \\ a+bi = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ und } b = 0, \\ a+bi \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Anmerkung: Man beachte, daß in $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation definiert ist. D.h. $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ machen bei Zahlen aus $\mathbb{C}$, die nicht zur Teilmenge $\mathbb{R}$ gehören, keinen Sinn.

- Darstellung der komplexen Zahlen in der ***komplexen Ebene*** (Gaußschen Ebene).

- Definition

  Für $z = a + bi$ heißt
  $$\overline{z} = a - bi$$
  die zu z ***konjugiert komplexe*** Zahl.

- Anmerkung: Statt $\overline{z}$ schreibt man auch z^*.

- Skizze und Beispiele.

- Definition

  Zu $z = a + bi$ heißt die reelle Zahl
  $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
  der ***Betrag*** von z.

- Skizze und Beispiele.

- Polarkoordinaten r, φ für eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

- Definition

  Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt
  $$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$
  die ***trigonometrische Darstellung*** von z. Der Winkel φ heißt ***Argument*** von z,
  $$\varphi = \arg(z).$$

- Umrechnungen zwischen cartesischen und polaren Koordinaten.