Zahlenmengen

Ein kurzer Überblick, Begriff der Primzahlen

- Wir verwenden spezielle Symbole für die wichtigsten Mengen von Zahlen.
  - ***natürliche Zahlen*** : $\mathbb{N}$
  - ***ganze Zahlen*** : $\mathbb{Z}$
  - ***rationale Zahlen*** : $\mathbb{Q}$
  - ***reelle Zahlen*** : $\mathbb{R}$
  - ***komplexe Zahlen*** : $\mathbb{C}$

  Hierbei sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wollen wir die Null dazunehmen, schreiben wir $\mathbb{N}_0$, also $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Es gilt

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

  Insbesondere gibt es Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind.

- Satz

  $$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

- Anmerkung: Reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrationale Zahlen genannt. Also sagt der Satz, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.

  Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

- Hilfssatz

  Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

  $$n^2 \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ gerade}.$$

- Sowohl Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen als auch Dezimalzahlen mit unendlich vielen periodischen Nachkommastellen lassen sich als Brüche schreiben.

  Irrationale Zahlen hingegen haben unendlich viele nicht-periodische Nachkommastellen.

- Beispiele für irrationale Zahlen.

- Beispiele für das Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche, speziell auch bei unendlich vielen periodischen Nachkommastellen.

- Definition

  Eine ***Primzahl*** ist eine ganze Zahl größer als 1, die keine positiven Teiler außer 1 und sich selbst hat. (D.h. es ist eine Zahl $p > 1$ mit exakt zwei positiven Teilern: 1 und p.)

- Auflistung aller Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Zahl n mit dem Sieb des Eratosthenes.

- Satz

  Jede ganze Zahl größer als 1 ist ein Produkt aus Primzahlen.

- Satz

  Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Gleichwertig: Es gibt keine größte Primzahl.)

- Satz

  Die Primfaktorzerlegung ist eindeutig. D.h. zu jeder ganzen Zahl $n > 1$ gibt es eine eindeutige Zerlegung

  $$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{a_l}$$

  mit Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_l$ und Exponenten $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{N}$.