

## Logik

### Prädikate, Quantoren

- Ist „ $x > 5$ “ eine Aussage?

Für  $x = 7$  ist der Ausdruck wahr, für  $x = 2$  ist er falsch. Also ist

$$x > 5$$

*keine* Aussage, denn eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Aber durch Einsetzen eines speziellen  $x$ -Wertes geht „ $x > 5$ “ in eine Aussage über, z.B. in die wahre Aussage  $7 > 5$  oder in die falsche Aussage  $2 > 5$ .

- Ein umgangssprachliches Beispiel ist „\_\_\_ mag Lasagne.“, das durch Einsetzen von „Garfield“ zu einer wahren Aussage wird.

Mehrere Variablen bzw. Leerstellen haben wir bei „ $x = y + 3$ “, sowie bei „ $x^2 + y^2 = z^2$ “ und bei „\_\_\_ ist eine \_\_\_ und mag Lasagne.“.

- Definition (Prädikat, Grundmenge)

Ein **Prädikat** ist ein sprachliches Gebilde mit einer Leerstelle (Variablen), das durch Einsetzen eines Elementes aus einer bestimmten Menge  $M$  zu einer wahren oder falschen Aussage wird. Die Menge  $M$  heißt **Grundmenge**.

Bei  $n$  Leerstellen (Variablen) hat man ein  **$n$ -stelliges Prädikat**.

- Beispiel: Steht  $P(x)$  für  $x > 5$ , und sollen für  $x$  Werte aus der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen eingesetzt werden, ist  $P(x)$  ein Prädikat über der Grundmenge  $\mathbb{N}$ .
- Beispiel: Steht  $P(x, y)$  für  $x < y$  über der Grundmenge  $\mathbb{Z}$ , so hat man ein zweistelliges Prädikat über  $\mathbb{Z}$ .
- Beispiel: Für  $x^2 + y^2 = z^2$  mit den drei Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  kann man entsprechend  $P(x, y, z)$  schreiben.
- Anmerkung: Eine „Aussage mit einer Variablen“ wie  $x > 5$  wird auch *Aussageform* oder *Aussagefunktion* genannt. Statt Grundmenge sagt man zu  $M$  auch *Einsetzungsbereich* oder *Individuenbereich*.
- Beispiele (aus der Umgangssprache, aus der Mathematik und aus einer Programmiersprache).

- Werden Prädikate statt Aussagen in Formeln der Aussagenlogik eingesetzt, entstehen Ausdrücke wie

$$P(x, y) \wedge Q(x, y, z) \rightarrow P(x, x)$$

oder

$$A \vee P(x, y, z) \leftrightarrow Q(x, y, z, w)$$

(Die Aussagenvariable  $A$  kann man auch als nullstelliges Prädikat auffassen.)

Mit solchen und noch allgemeiner gebauten Formeln beschäftigt sich die Prädikatenlogik. Beispielsweise können sogenannte Quantoren vorkommen.

- Quantoren

Es sei  $P(x)$  ein Prädikat.

1. Die Aussage „ $P(x)$  ist wahr für alle  $x$  aus der Grundmenge.“ wird

$$\forall x P(x)$$

geschrieben. Dabei heißt  $\forall$  **Allquantor**.

2. Die Aussage „Es existiert (mindestens) ein  $x$  aus der Grundmenge, so daß  $P(x)$  wahr ist.“ wird

$$\exists x P(x)$$

geschrieben.  $\exists$  heißt **Existenzquantor**.

- Bei einer endlichen Grundmenge gibt es für die Aussagen  $\forall x P(x)$  und  $\exists x P(x)$  äquivalente Schreibweisen ohne Quantoren.
- In einem Ausdruck der Art  $\exists x \forall y P(x, y, z)$  heißen  $x$  und  $y$  **gebundene Variablen** und  $z$  **freie Variable**. Sind alle Variablen gebunden, hat man eine Aussage.
- Beispiele
- Negation von Quantoren: Es gilt

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

und

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x).$$

- Werden Quantoren geschachtelt, ist die Reihenfolge wichtig. Man vergleiche  $\forall x \exists y [y > x]$  mit  $\exists y \forall x [y > x]$ , wobei  $\mathbb{N}$  die Grundmenge sein soll.
- Beispiele für mathematische Sätze, die mit Quantoren formuliert sind, dabei soll  $\mathbb{N}$  die Grundmenge sein.

1.  $\forall q \exists p \forall x, y [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$
2.  $\forall a, b, c, n [(a, b, c > 0 \wedge n > 2) \rightarrow a^n + b^n \neq c^n]$
3.  $\forall q \exists p \forall x, y [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow (xy \neq p \wedge xy \neq p + 2))]$