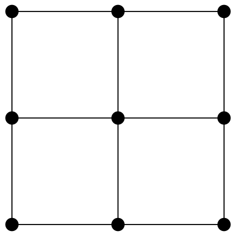
FH Gießen-Friedberg, Sommersemester 2010 — Lösungen zu Übungsblatt 12
Diskrete Mathematik (Informatik) — 30. Juni, 2. Juli 2010
Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz

Graphen: Rundwege, Kodierung von Bäumen

Aufgabe 1.
Gibt es in dem folgenden Graphen eine Euler-Rundtour? Gibt es eine Hamilton-Rundtour?



Lösung: Es gilt:

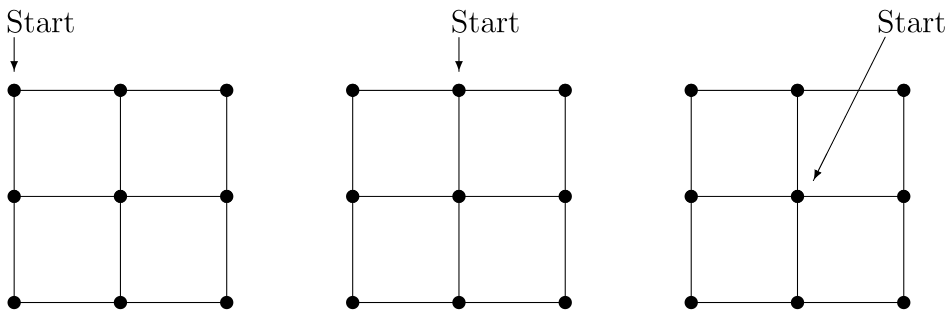
$$\text{Eine Euler-Rundtour ist möglich.} \quad \Longrightarrow \quad \text{Alle Ecken haben geraden Grad.}$$

Daraus folgt mit Kontraposition:

$$\begin{gathered}\text{Es existiert eine Ecke mit ungeradem Grad.}\\ \Longrightarrow \\ \text{Eine Euler-Rundtour ist nicht möglich.}\end{gathered}$$

Da der Graph Ecken mit ungeradem Grad enthält, ist *keine* Euler-Rundtour möglich.

Um zu untersuchen, ob eine Hamilton-Rundtour möglich ist, führen wir eine Fallunterscheidung durch; wir starten mit der Tour an drei verschiedenen Ecken. Aus Symmetriegründen haben wir damit alle neun möglichen Fälle für eine Startecke abgedeckt.



In allen Fällen zeigt sich: In dem Graphen ist *keine* Hamilton-Rundtour möglich.

In den beiden ersten Fällen läuft man entweder außen herum und verpaßt die Mitte, oder man geht zur Mitte und kommt dann nicht mehr durch einen der Eckpunkte.

Im dritten Fall kommt man nicht mehr zur Mitte zurück, wenn man alle äußeren Ecken durchläuft.

Aufgabe 2.
Welche der Graphen C_n, K_n und W_n sind Euler-Graphen? Welche sind Hamilton-Graphen?

Lösung: Bezüglich Euler-Graphen gilt (siehe Vorlesung):

1. Existiert in einem Graphen eine Ecke mit ungeradem Grad, dann gibt es keine Euler-Rundtour.

2. Ist ein Graph zusammenhängend, und haben alle Ecken geraden Grad, dann existiert eine Euler-Rundtour.

Die Graphen C_n, K_n und W_n sind alle zusammenhängend.

- C_n $(n \geq 3)$:

  Alle Ecken haben den Grad 2. Damit sind alle C_n eulersch.

- K_n $(n \geq 3)$:

  Alle Ecken haben den Grad $n-1$. Also sind die Graphen K_n eulersch für n ungerade und nicht eulersch für n gerade.

- W_n $(n \geq 3)$:

  Alle „äußeren" Ecken eines Rades haben den Grad 3. Somit ist keiner der Graphen W_n eulersch.

Bezüglich Hamilton-Graphen können wir zeigen: Alle Graphen C_n, K_n und W_n mit beliebigem $n \geq 3$ sind Hamilton-Graphen. Wir geben im folgenden die Begründungen an.

- C_n $(n \geq 3)$:

  Man startet an einer beliebigen Ecke und läuft „außen auf dem Rad herum". Dadurch wird jede Ecke genau einmal besucht, und man kommt zur Ausgangsecke zurück.

- K_n $(n \geq 3)$:

  Man startet bei einer beliebigen Ecke und besucht dann Schritt für Schritt Ecken, die bis dahin noch nicht durchlaufen wurden. Hat man alle Ecken besucht, geht man zur Ausgangsecke zurück. Das alles ist möglich, da bei einem vollständigen Graphen alle überhaupt möglichen Kanten vorhanden sind, so daß man von jeder Ecke zu jeder beliebigen anderen Ecke gehen kann.

- W_n ($n \geq 3$):

  Man startet zum Beispiel bei der Radnabe, geht dann zu einer beliebigen „äußeren“ Ecke des Rades und läuft dann „außenherum“ bis zur letzten noch nicht besuchten Ecke. Von dort geht man zurück zur Radnabe und hat damit einen geschlossenen Rundweg, bei dem jede Ecke exakt einmal besucht wurde.

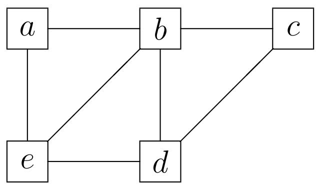
Aufgabe 3.
Gibt es in $G = (V, E)$ bei den folgenden Ecken- und Kantenmengen einen Hamiltonkreis? Falls ja, geben Sie einen an.

1. $V = \{a, b, c, d, e\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

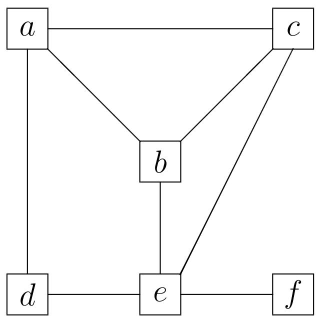
2. $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$

Lösung:

1. Eine Hamilton-Rundtour ist möglich, zum Beispiel durch a, b, c, d, e, a.



2. Eine Hamilton-Rundtour ist nicht möglich.



   - Fall 1: Startet man bei f, kommt man nicht mehr zu f zurück.
   - Fall 2: Startet man nicht bei f, muß man irgendwann f besuchen und kommt nicht mehr weg.

Aufgabe 4.
Welcher der folgenden „Codes“ ist der Vater-Code eines Baumes?

(a) $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$	(b) $(5, 4, 3, 2, 1, 0)$	(c) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
(d) $(2, 4, 1, 3, 0)$	(e) $(0, 0, 0, 5, 4, 4)$	(f) $(2, 3, 4, 6, 4, 4)$

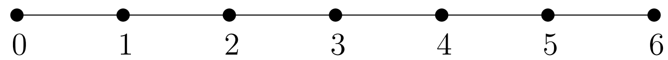
Lösung:

(a) $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$

Dies ist der Vater-Code eines Baumes, wie man durch Dekodierung sehen kann. Dazu schreiben wir die Zahlen 1 bis 6 über die gegebenen Zahlen.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Wir erhalten eine Liste von sechs Kanten, jede Kante wird durch zwei übereinander stehende Zahlen dargestellt. Die untere Zahl bezeichnet den Vater-Knoten, die obere Zahl steht für den Sohn-Knoten. Die erste Kante in der Liste verbindet also den Vater-Knoten 0 mit dem Sohn-Knoten 1. Die zweite Kante verbindet den Vater-Knoten 1 mit dem Sohn-Knoten 2 u.s.w. Daß es sich um einen Baum handelt, sieht man an der folgenden Graphik, in der die sechs Kanten gezeichnet sind.



(b) $(5, 4, 3, 2, 1, 0)$

Wir versuchen, die Liste entsprechend der Methode des Vater-Codes zu dekodieren. Dazu schreiben wir 1, 2, ... über die gegebenen Zahlen.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Daß wir hier keine Auflistung von Kanten eines Baumes haben, sehen wir unmittelbar daran, daß eine der Kanten den Knoten 3 mit sich selbst verbindet, was bei einem Baum nicht sein darf.

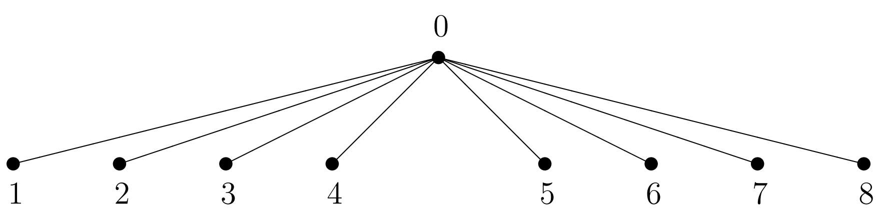
Also haben wir hier nicht den Vater-Code eines Baumes.

(c) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Die Dekodierung ergibt die folgende Liste von Kanten.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Jeder der Knoten 1 bis 8 ist durch eine Kante mit dem Knoten 0 verbunden. Wir haben einen Baum.



(d) $(2, 4, 1, 3, 0)$

Dies ist nicht der Vater-Code eines Baums. Die Dekodierung ergibt die folgende Kantenliste.

1	2	3	4	5
2	4	1	3	0

Zeichnet man diese Kanten, erhält man einen schlichten Graphen mit zwei Komponenten, wobei eine Komponente ein Kreis ist.

(e) $(0, 0, 0, 5, 4, 4)$

Auch hier ist kein Baum kodiert. Die Kantenliste

1	2	3	4	5	6
0	0	0	5	4	4

enthält zweimal eine Kante zwischen den Knoten 4 und 5, was bei einem Baum nicht sein darf. (Selbst bei einem ganz allgemeinen schlichten Graphen ist das verboten.)

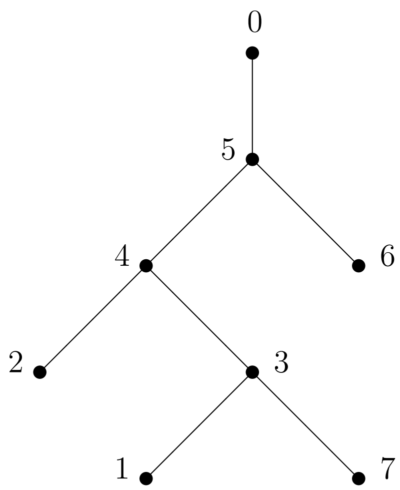
(f) $(2, 3, 4, 6, 4, 4)$

Dies ist ebenfalls nicht die Kodierung eines Baumes. Hier hat man in der Kantenliste zweimal eine Kante zwischen den Knoten 4 und 6.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	6	4	4

Aufgabe 5.
Zeichnen Sie den Baum, der zu dem Prüfer-Code $(3, 4, 5, 3, 4, 5)$ gehört.

Lösung:



Zur Dekodierung des Prüfer-Codes muß zunächst eine 0 an die Liste der Knoten angehängt werden. Die 0 bezeichnet den Wurzelknoten. Der Algorithmus zur Dekodierung (siehe Vorlesung) liefert dann die folgende Kantenliste.

1	2	6	7	3	4	5
3	4	5	3	4	5	0

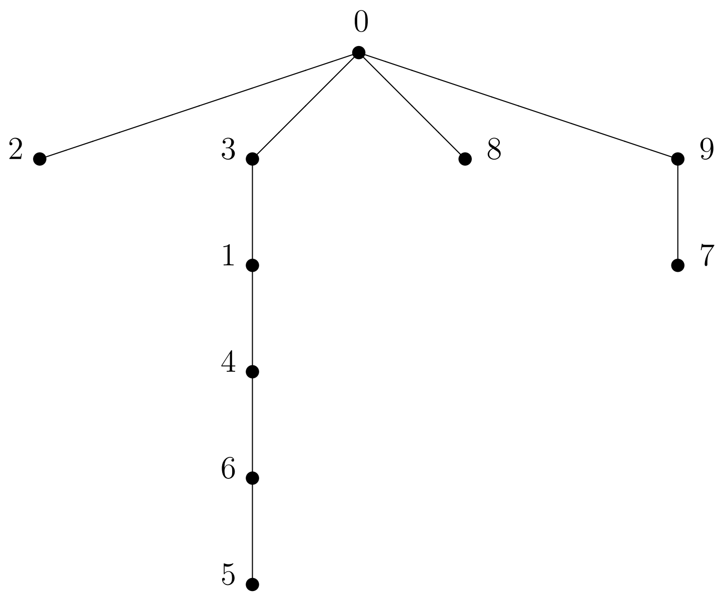
Zeichnet man die Kanten, so entsteht der gesuchte Baum.

Aufgabe 6.
Zeichnen Sie den zum Prüfer-Code $(0, 6, 4, 1, 3, 0, 9, 0)$ gehörenden Baum. (Beachten Sie, daß eine Null angehängt werden muß, unabhängig davon, daß der Prüfer-Code bereits mit einer Null endet.)

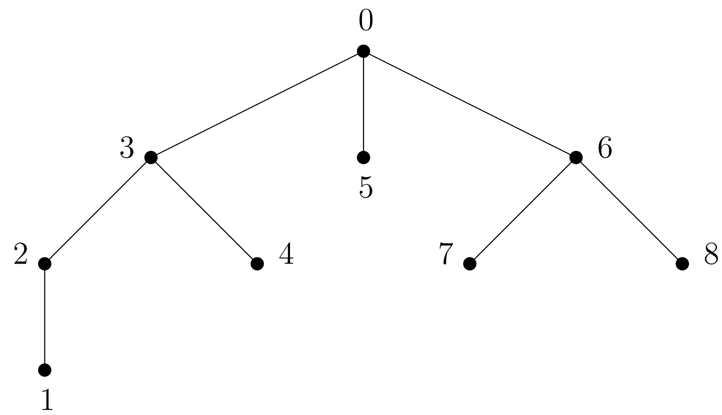
Lösung: Wir hängen eine 0, die Bezeichnung des Wurzelknotens, an die Knotenliste und bekommen mit dem Algorithmus zur Dekodierung des Prüfer-Codes (siehe Vorlesung) die folgende Kantenliste.

2	5	6	4	1	3	7	8	9
0	6	4	1	3	0	9	0	0

Eine Zeichnung der Kanten ergibt den gesuchten Baum.



Aufgabe 7.
Der folgende Baum mit der Wurzel 0 sei gegeben. Bestimmen Sie den Prüfer-Code.



Lösung: Mit dem Algorithmus zur Erzeugung des Prüfer-Codes wird zunächst eine Kantenliste aufgebaut.

Das Blatt mit der kleinsten Nummer ist das Blatt 1. Als erste Kante kommt deshalb die Kante mit dem Sohn-Knoten 1 und dem Vater-Knoten 2 in die Liste. Diese Kante wird zusammen mit dem Knoten 1 aus dem Baum entfernt.

Jetzt ist der Knoten 2 das Blatt mit der kleinsten Nummer, und die Kante zwischen 2 und 3 wird in die Liste aufgenommen. Außerdem werden diese Kante und der Knoten 2 aus dem Baum entfernt. Bis hierhin haben wir also die folgende Kantenliste.

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}$$

Der Baum hat jetzt die Blätter 4, 5, 7 und 8. Also ist 4 das Blatt mit der kleinsten Nummer. Deshalb ist die Kante zwischen 4 und 3 die nächste in der Liste.

Nach einigen weiteren Schritten erhalten wir die komplette Kantenliste. (Details des Algorithmus: siehe Vorlesung.)

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}$$

Um schließlich den Prüfer-Code zu bekommen, wird die erste Zeile gestrichen und die letzte Null der zweiten Zeile weggelassen. Damit ist

$$(2, 3, 3, 0, 0, 6, 6)$$

der gesuchte Prüfer-Code des vorgegebenen Baumes.

Aufgabe 8.
Schreiben Sie Ihr Geburtsdatum mit acht Zahlen auf (Tag, Monat, Jahr; falls Tag oder Monat nur eine Zahl sind, ergänzen Sie mit Null zu zwei Zahlen). Nehmen Sie diese Zahlenfolge als Prüfer-Code, dekodieren Sie den Code, und zeichnen Sie den zugehörigen Baum.

Lösung: Hier gibt es individuell unterschiedliche Lösungen.