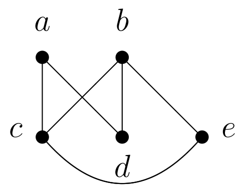
Graphen: Darstellungen, Isomorphie, Eckenfärbung

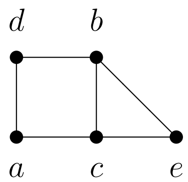
Aufgabe 1.
Zeichnen Sie die Graphen $G = (V, E)$ mit:

1. $V = \{a, b, c, d, e\}$,
   $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$,
2. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
   $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$.

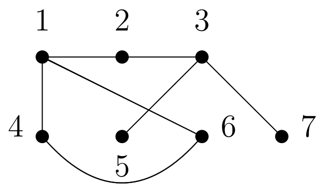
Lösung:

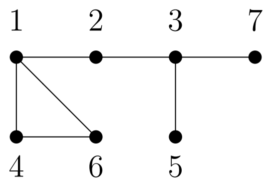
1. Im folgenden ist der Graph auf zwei Arten dargestellt; zunächst sind die Ecken in alphabetischer Reihenfolge gezeichnet und mit den Kanten entsprechend der Kantenmenge verbunden. Wie man sieht, gibt es Kanten, die sich überschneiden. Schöner ist eine Darstellung, in der es keine überschneidenden Kanten gibt, das ist aber keineswegs bei allen sondern nur bei planaren (plättbaren) Graphen möglich. Wie man an der zweiten Darstellung sieht, ist unser Graph plättbar und kann ohne sich überschneidende Kanten gezeichnet werden, wenn die Ecken passend angeordnet werden.



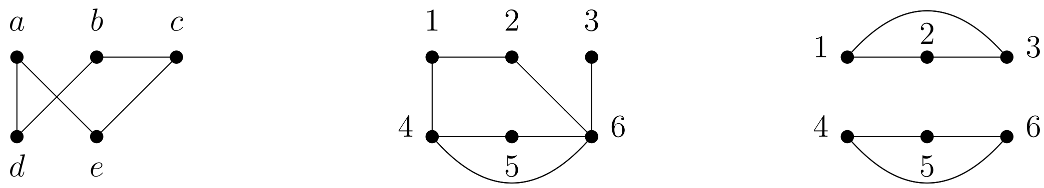


2. Hier haben wir ebenfalls einen plättbaren Graphen.





Aufgabe 2.
Es sind die folgenden drei schlichten Graphen gegeben.



1. Schreiben Sie zu jedem Graphen die aufzählende Darstellung $G = (V, E)$ mit Eckenmenge V und Kantenmenge E auf.
2. Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ mit n Ecken kann durch die zugehörige Adjazenzmatrix beschrieben werden: eine $(n \times n)$–Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1$, falls die Kante $\{v_i, v_j\}$ zur Kantenmenge E gehört und $a_{ij} = 0$ sonst.

   Geben Sie die Adjazenzmatrizen der Graphen an.

Lösung:

1. Aufzählende Darstellungen.

   - Linker Graph:

   $$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e\}, \\ E &= \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}. \end{aligned}$$

   - Mittlerer Graph:

   $$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ E &= \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}. \end{aligned}$$

   - Rechter Graph:

   $$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ E &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}. \end{aligned}$$

2. Adjazenzmatrizen.

   - Linker Graph:

	a	b	c	d	e
a	0	0	0	1	1
b	0	0	1	1	0
c	0	1	0	0	1
d	1	1	0	0	0
e	1	0	1	0	0

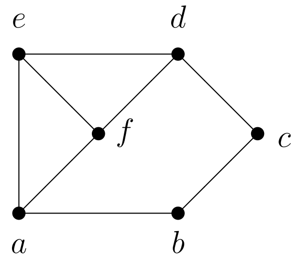
- Mittlerer Graph:

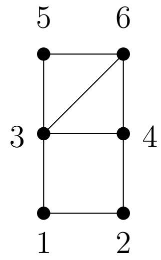
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	1	1	1	1	0

- Rechter Graph:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0

Aufgabe 3.
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.





Lösung: Die Graphen sind *nicht* isomorph. Eine Begründung ist zum Beispiel, daß im rechten Graphen der Eckengrad 4 vorkommt, der im linken Graphen nicht existiert.

Genauer: Bei einem Isomorphismus gibt es *Invarianten*, d.h. Größen, die bei den isomorphen Graphen übereinstimmen. In der Vorlesung wurden drei Invarianten erwähnt: Anzahl der Ecken, Anzahl der Kanten, „Verteilung“ der Eckengrade. Stimmen zwei Graphen nicht in allen diesen Größen überein, können sie nicht isomorph sein.

Linker Graph

Ecken: 6
Kanten: 8
Eckengrade:

Grad	Anzahl
2	2
3	4
4	0

Rechter Graph

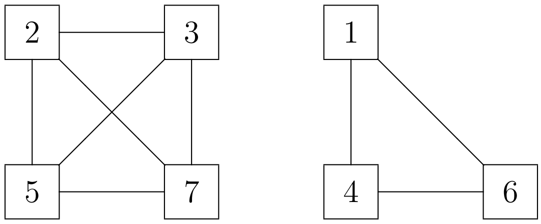
Ecken: 6
Kanten: 8
Eckengrade:

Grad	Anzahl
2	3
3	2
4	1

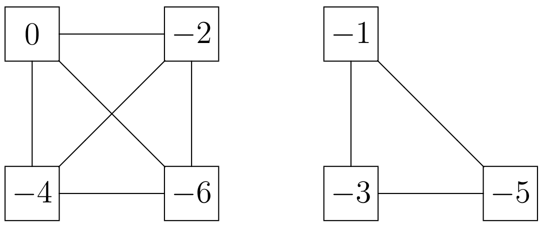
Aufgabe 4.
Bei dem Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sollen zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide Primzahlen sind oder beide nicht Primzahlen sind. Bei dem Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_2 = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6\}$ sollen zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind. Gesucht ist ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2.

Lösung:

- Graph G_1:



- Graph G_2:



Ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 ist eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ mit

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten für einen Isomorphismus zwischen G_1 und G_2. Die folgende Zuordnung bietet sich aufgrund der beiden gezeichneten Graphen an.

$2 \longleftrightarrow 0$	$7 \longleftrightarrow -6$	$6 \longleftrightarrow -5$
$3 \longleftrightarrow -2$	$1 \longleftrightarrow -1$	
$5 \longleftrightarrow -4$	$4 \longleftrightarrow -3$	

Aufgabe 5.
Existiert ein schlichter Graph mit fünf Ecken und den folgenden Eckengraden? Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten? Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

(a) 1, 2, 3, 4, 5	(b) 3, 3, 3, 3, 2	(c) 1, 2, 3, 4, 4
(d) 3, 4, 3, 4, 3	(e) 0, 1, 2, 2, 3	(f) 4, 3, 3, 2, 2

Lösung: Bei dieser Aufgabe ist der folgende Satz (siehe Vorlesung) nützlich: Die Summe aller Eckengrade ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

Hierbei ist V die Eckenmenge, E die Kantenmenge, und $d(v)$ ist der Grad der Ecke v.

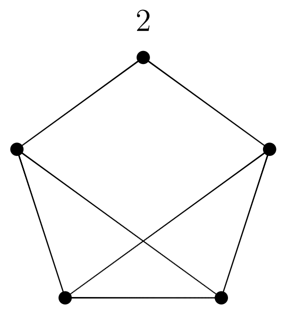
Speziell folgt aus diesem Satz: Die Summe der Eckengrade muß eine gerade Zahl sein.

(a) 1, 2, 3, 4, 5

Einen Graphen mit diesen Eckengraden gibt es nicht, da die Summe der Eckengrade ungerade wäre, was unmöglich ist.

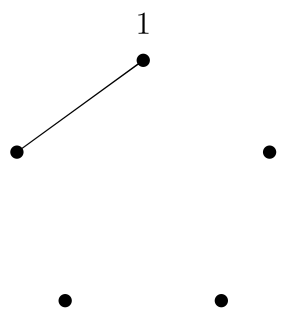
(b) 3, 3, 3, 3, 2

Der folgende Graph ergibt sich zwangsläufig. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 7$. Die Ecke mit dem Eckengrad 2 ist gekennzeichnet.



(c) 1, 2, 3, 4, 4

1. Wir wählen eine der fünf Ecken für den Eckengrad 1 aus und zeichnen die zugehörige Kante.
2. Zwei der verbleibenden vier Ecken sollen den Eckengrad 4 haben, also auch eine der drei Ecken, die in der Skizze noch keine inzidente Kante haben. Das ist *nicht möglich*, der Eckengrad 1 würde zerstört.

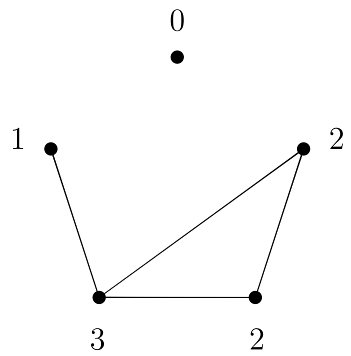


(d) 3, 4, 3, 4, 3

Einen Graphen mit diesen Eckengraden kann es nicht geben, weil die Summe der Eckengrade ungerade wäre.

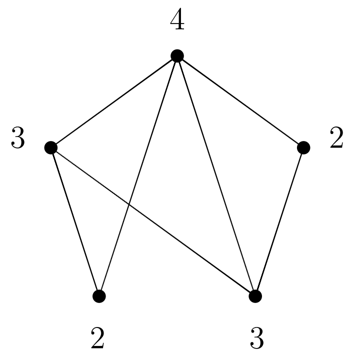
(e) 0, 1, 2, 2, 3

Der folgende Graph hat die geforderten Eckengrade. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 4$. Die Eckengrade sind an die Ecken geschrieben.



(f) 4, 3, 3, 2, 2

Der folgende Graph hat die geforderten Eckengrade. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 7$. Die Eckengrade sind an die Ecken geschrieben.



Aufgabe 6.
Gesucht sind die chromatischen Zahlen der Graphen C_n, K_n und W_n.

Lösung:

- C_n: Kreis (circle) mit n Ecken.

  Zeichnet man die Graphen C_n für $n = 3, 4, 5$ und 6 und färbt sie mit kleinstmöglicher Farbanzahl ein, so sieht man, daß $\chi(C_3) = 3$, $\chi(C_4) = 2$, $\chi(C_5) = 3$ und $\chi(C_6) = 2$ ist.

Man beginnt mit einer beliebigen Ecke, geht im Kreise herum und kommt dabei bis zur letzten Ecke mit zwei Farben aus, die man abwechselnd verwendet. Bei der letzten Ecke benötigt man eventuell eine dritte Farbe, denn die letzte Ecke ist sowohl zur vorletzten als auch zur Startecke benachbart und diese beiden können unterschiedliche Farben haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Eckenzahl ungerade ist, wie an den Beispielen unmittelbar klar wird.

Somit gilt allgemein:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \geq 3).$$

- K_n: vollständiger Graph mit n Ecken.

  Da jede Ecke benachbart zu jeder anderen Ecke ist, muß jede Ecke mit einer anderen Farbe gefärbt werden. Also ist

$$\chi(K_n) = n.$$

- W_n: Rad (wheel) mit n Ecken außen und einer Ecke als Radnabe.

  Die Ecke in der Mitte ist benachbart zu allen anderen Ecken, muß also eine eigene Farbe haben, die für keine andere Ecke mehr verwendet werden kann.

  Bei den äußeren Ecken verhält es sich wie bei den Kreisen C_n.

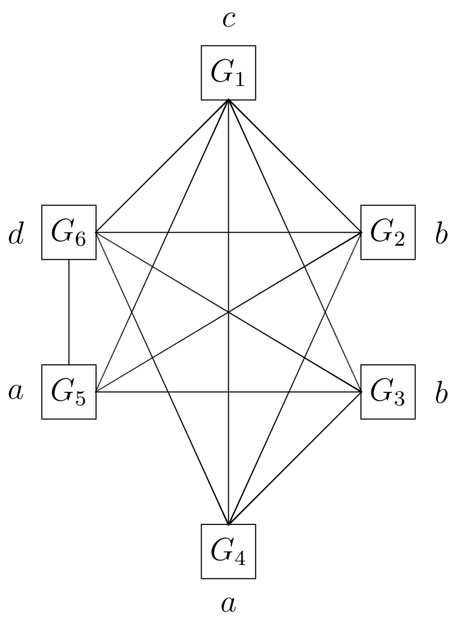
  Für den Graphen W_n benötigt man also eine Farbe mehr als für C_n:

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \geq 3).$$

Aufgabe 7.
Angenommen, der Fachbereich MNI hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen. Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat? Die Gremien sind:
$G_1 = \{\text{Henrich, Kügler, Letschert}\}$,
$G_2 = \{\text{Kaufmann, Kügler, Metz, Müller, Renz}\}$,
$G_3 = \{\text{Henrich, Jäger, Kneisel, Letschert}\}$,
$G_4 = \{\text{Kaufmann, Lauwerth, Letschert, Müller, Schneider}\}$,
$G_5 = \{\text{Henrich, Kügler}\}$,
$G_6 = \{\text{Jäger, Kaufmann, Kügler, Letschert}\}$.
Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Eckenfärbung zur Lösung.

Lösung: Zur Modellierung der Problemstellung wird ein Graph mit 6 Ecken verwendet; jede Ecke entspricht einem Gremium. Zwei Ecken werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Gremien mindestens ein gemeinsames Mitglied haben.

Gremien, die benachbarten Ecken entsprechen, dürfen also nicht zur gleichen Zeit tagen. Werden die verschiedenen Sitzungstermine durch unterschiedliche Farben dargestellt, dann ist die chromatische Zahl des Graphen gleich der kleinstmöglichen Anzahl an Terminen.



Als „Farben“ werden in dem Graphen die Buchstaben a, b, c und d verwendet. Die chromatische Zahl ist gleich 4.

Man kommt also mit vier Sitzungsterminen aus.

Aufgabe 8.
In Nord-Amerika werden bestimmte Fernsehkanäle den Fernsehstationen so zugeteilt, daß niemals zwei Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, denselben Kanal verwenden. Wieviele verschiedene Kanäle werden dann für die sechs Stationen benötigt, deren Entfernungen voneinander in der folgenden Tabelle gegeben sind?

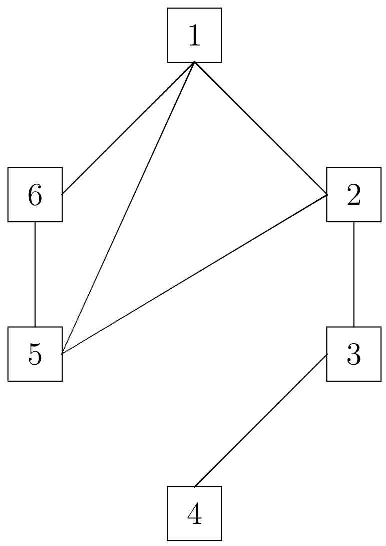
	1	2	3	4	5	6
1	—	85	175	200	50	100
2	85	—	125	175	100	160
3	175	125	—	100	200	250
4	200	175	100	—	210	220
5	50	100	200	210	—	100
6	100	160	250	220	100	—

Lösung: Wir modellieren die Situation mit einem Graphen; Eckenfärbung mit minimaler Farbanzahl liefert die Lösung.

- **Ecken**[1] entsprechen den *Fernsehstationen*.

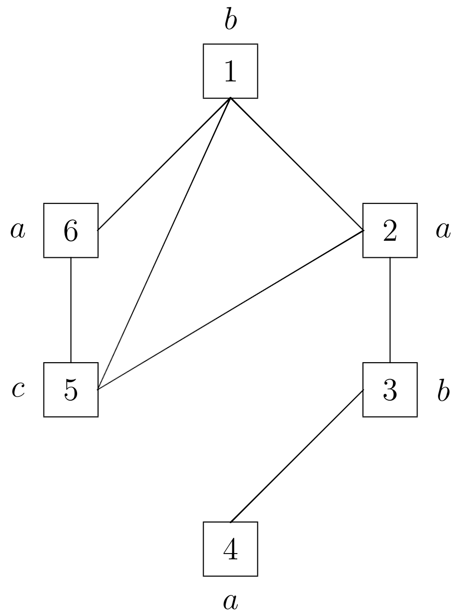
[1] Die Bestandteile des Modells sind fett gedruckt, die Objekte und Gegebenheiten der Realität kursiv.

- **Kanten** verbinden Ecken genau dann, wenn die betreffenden Fernsehstationen *weniger als 150 Meilen voneinander entfernt* sind.



Nach der Modellierung der Ausgangssituation wird in dem Modell gearbeitet; es wird eine Eckenfärbung durchgeführt. Das Ergebnis dieser Färbung wird bezüglich der realen Problemstellung interpretiert und liefert die Lösung.

- **Farben** entsprechen den *Fernsehkanälen*.
- Die **chromatische Zahl** entspricht der *Mindestanzahl benötigter Kanäle*.



Als Ersatz für Farben haben wir in der Graphik die Buchstaben a, b und c verwendet. Die chromatische Zahl des Graphen ist gleich 3. Also sind drei Kanäle ausreichend.